



Equation de T.B.M.T et application à l'étude du spin du λ^0 .

Guy Royer

► To cite this version:

Guy Royer. Equation de T.B.M.T et application à l'étude du spin du λ^0 . . Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Faculté des Sciences de Nantes, 1975. Français. NNT: . tel-01365747

HAL Id: tel-01365747

<https://hal.in2p3.fr/tel-01365747>

Submitted on 13 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE NANTES

par

Guy R O Y E R

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE 3^e CYCLE

EQUATION DE T.B.M.T ET APPLICATION A L'ETUDE DU SPIN DU Λ^0

soutenue le 18 Décembre 1975

devant le jury composé de Messieurs les professeurs

W. L A S K A R

P. A V I G N O N

R. N A T A F

Président

Examineur

Examineur

Ce travail a été effectué dans le laboratoire de Monsieur W. LASKAR qui a su nous intéresser aux travaux de Monsieur le Professeur H. BACRY que nous remercions.

Nous remercions également Monsieur le Professeur R. NATAF qui a bien voulu nous faire l'honneur de participer au jury.

INTRODUCTION

Notre but est d'étudier le moment cinétique intrinsèque du Λ^0 . Il nous faut d'abord **pour** cela connaître le mouvement de la polarisation d'une particule (proton de désintégration dans la réaction $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$) placée dans un champ électromagnétique.

THOMAS, BARGMANN, MICHEL et TELEGDI [1] ont donné une équation relativiste de ce mouvement en se plaçant dans des conditions particulières. Ils considèrent un champ électromagnétique uniforme et constant (sans faire le calcul, ils indiquent comment on pourrait généraliser leur équation à un champ inhomogène). La notion de bilocalité est négligée, cela permet de décrire la polarisation à l'aide d'un quadrivecteur s . Ils s'intéressent aux particules ayant un moment dipolaire magnétique à l'exclusion de tout autre moment magnétique ou électrique. Dans une première partie, on considérera donc l'équation de T.B.M.T.

Cette équation a été incluse par BACRY [2] dans une théorie plus générale. Le champ électromagnétique est, cette fois, quelconque. On considère une particule comme la limite d'une molécule. BACRY ne néglige pas la bilocalité, cela l'amène à décrire la polarisation à l'aide d'un tenseur S antisymétrique de rang deux. Il tient compte de tous les moments multipôlaire que peut avoir une particule et, dans ce but, les définit d'abord d'une manière relativiste. Cette théorie sera énoncée dans une deuxième partie.

Sur une application physique (diffusion des rayons X "mous" par une cible polarisée), nous rappellerons rapidement ce qui distingue la théorie de BACRY de la théorie classique (GELL-MANN et GOLDBERGER [3]).

Dans une troisième partie, en utilisant l'équation de T.B.M.T., on étudiera la polarisation du Λ^0 .

I° PARTIE EQUATION DE THOMAS, BARGMANN, MICHEL et TELEGDI :

Conditions de validité de l'équation :

* Soit une particule de charge q , de masse m , de vitesse unitaire u . Pour décrire la polarisation FRENKEL [4] part d'un moment magnéto-électrique M (tenseur antisymétrique de rang 2) qui représente le moment magnétique et le moment électrique (par analogie avec le tenseur champ électromagnétique). Le moment est supposé purement magnétique dans le repère propre c'est à dire :

$$M_{\alpha\beta} u^\beta = 0$$

Au tenseur M est associé un moment angulaire interne S selon la relation

$$M_{\alpha\beta} = \frac{e}{m c} S_{\alpha\beta}$$

ce qui donne

$$S_{\alpha\beta} u^\beta = 0$$

Le moment angulaire interne S sera donc orthogonal à u .

$$S = (u \wedge s)^+ \quad \text{en posant} \quad \boxed{s = S^+ \cdot u}$$

Le quadrivecteur $s = S^+ \cdot u$ est le quadrivecteur polarisation cinétique (spin) utilisé par T.B.M.T.[1]

Dans les théories bilocales [4] on considère une particule comme un fluide tournant relativiste, ce qui amène à faire la distinction entre le centre de gravité (de coordonnées y , qui a un mouvement uniforme si la particule est libre) et le centre de matière (de coordonnées x) ; la distance $\lambda = x - y$ (vecteur de bilocalité) étant égale à $\frac{u \cdot S}{m}$ (si on admet $p = m u$).

Poser $S \cdot u = 0$ revient donc à négliger la notion de bilocalité d'une particule.

BACRY posera, lui, $p^2 \lambda = p \cdot S$ et étudiera le mouvement du quadrivecteur λ .

* La relation.

$$p = m u$$

est supposée valable (p : quantité de mouvement de la particule).

La théorie générale montre que cette relation n'est vraie que si la particule est libre (cas particulier de $p = (m - \vec{w} \cdot \vec{B} + \vec{l} \cdot \vec{E}) \cdot u$).

* On considère que la particule a un moment dipolaire magnétique à l'exclusion de tout autre moment multipolaire magnétique ou électrique (à part la charge q).

Ce moment dipolaire est représenté par un quadrivecteur

$$M_d.$$

(BACRY, en ne négligeant pas la bilocalité, montrera que ce n'est qu'une partie d'un tenseur antisymétrique de rang deux).

T.B.M.T. indiquent, néanmoins, le terme qu'il faudrait ajouter pour tenir compte d'un moment dipolaire électrique.

* On admet que les quadrivecteurs polarisation magnétique M_μ et cinétique s_μ sont proportionnels et liés par :

$$\boxed{M = \frac{g q}{2 m} s} \quad (1)$$

comme en physique non relativiste.

$\frac{q}{2 m}$ est le magnéton habituel ($\frac{h}{h} = c = 1$).

$\frac{g q}{2 m}$ est le rapport gyromagnétique

* Le champ électromagnétique est pris uniforme et constant. On suppose aussi que la polarisation de la particule n'influe pas sur sa vitesse. On peut alors utiliser l'équation :

$$\boxed{\dot{u} = \frac{-q}{m} F \cdot u} \quad (2)$$

(Ecriture covariante de la relation $\frac{d(m\gamma)}{dt} = q \vec{v} \cdot \vec{E}$ et de la force de LORENTZ $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$).

Des termes de la forme $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}$ seront donc nuls. (Ce sont eux qui sont responsables de la déviation du faisceau dans l'expérience de STERN et GERLACH par exemple).

Dans le cas d'un champ inhomogène, il faudrait ajouter un gradient du champ.

Equation de T.B.M.T. :

Elle donne le mouvement de s , c'est à dire \dot{s} , en fonction de u , s et F . (dérivation par rapport au temps propre).

Pour un observateur n quelconque: $s = (s_0, \vec{s})$; mais, dans le repère d'inertie, par analogie avec la physique non relativiste, on doit réobtenir un vecteur \vec{s} à trois dimensions.

FRENKEL, en posant $s = S^+ \cdot u$, imposait bien à s cette condition, puisque :

$$u \cdot s = u \cdot S^+ \cdot u = 0 \text{ (car } S^+ \text{ antisymétrique).}$$

donc $s = (0, \vec{s})$ dans le repère propre instantané u . ($u = (1, 0)_u$)

Déterminons \dot{s} dans le repère propre : [5]:

$$\dot{s} = \left(\frac{ds^0}{d\tau}, \frac{d\vec{s}}{d\tau} \right)_u$$

$$\text{or } s \cdot u = 0 \Rightarrow \dot{s} \cdot u = -s \cdot \dot{u} \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{ds^0}{d\tau} = \dot{s} \cdot u = -s \cdot \dot{u} \quad \text{donc}$$

$$\boxed{\dot{s} = \left(-s \cdot \dot{u}, \frac{d\vec{s}}{d\tau} \right)_u}$$

Dans le repère de la particule et d'après le théorème du moment cinétique, $\frac{d\vec{s}}{d\tau}$ est donné par l'équation de la physique classique :

$$\boxed{\frac{d\vec{s}}{d\tau} = \frac{q_e}{2m} \vec{s} \times \vec{B}} \quad (3) \quad (\vec{B} \text{ vu par la particule})$$

(Précession de LARMOR du spin placé dans le champ magnétique \vec{B}).

$$\dot{\vec{S}} = (-s \cdot \dot{\vec{U}}) \vec{U} + \frac{ge}{2m} \vec{S} \times \vec{B}$$

d'une manière covariante:

$$\dot{\vec{S}} = -(\vec{U} \wedge \dot{\vec{U}}) \cdot \vec{S} - \frac{ge}{2m} (\vec{U} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{S}$$

En utilisant :

$$\dot{\vec{U}} = -\frac{q}{m} \vec{F} \cdot \vec{U} \quad \text{et} \quad \vec{F} = \vec{U} \wedge \vec{E} + (\vec{U} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{U}$$

on obtient finalement l'équation T.B.M.T. :

$$\dot{\vec{S}} = -\frac{gq}{2m} \vec{F} \cdot \vec{S} - (g-2) \frac{q}{2m} (s \cdot \vec{F} \cdot \vec{U}) \vec{U} \quad (1)$$

Remarques sur l'équation T.B.M.T. :

* Pour bien distinguer les termes qui viennent du moment magnétique de ceux qui viennent de la charge, on peut poser :

$$\mu = g \mu_0 s$$

et on obtient alors l'équation :

$$\dot{\vec{S}} = -g \mu_0 \vec{F} \cdot \vec{S} + \left(\frac{q}{m} - g \mu_0 \right) (s \cdot \vec{F} \cdot \vec{U}) \vec{U}$$

En particulier, pour une particule neutre ($n, \Lambda^0, \Sigma^0, \Xi^0$),

on a :

$$\dot{\vec{S}} = -g \mu_0 \vec{F} \cdot \vec{S} - g \mu_0 (s \cdot \vec{F} \cdot \vec{U}) \vec{U} \quad (5)$$

* Pour $g = 2$ (particule de DIRAC), l'équation se simplifie :

$$\dot{\vec{S}} = -\frac{q}{m} \vec{F} \cdot \vec{S}$$

C'est l'analogue de

$$\dot{\vec{U}} = -\frac{q}{m} \vec{F} \cdot \vec{U}$$

* Dans le cas d'une particule possédant un moment dipolaire électrique $\vec{E} = \frac{q'e}{2m} \vec{S}$, il faut ajouter un terme dans la relation (3) qui devient :

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{q'e}{2m} \vec{S} \times \vec{B} + \frac{g'e}{2m} \vec{S} \times \vec{E} \quad (\text{dans le repère propre})$$

d'où l'équation T.B.M.T. pour une particule munie d'un moment électrique \vec{E} ($E \neq u, F$).

$$\dot{S} = -\frac{gq}{2m} F.s - \frac{g'q}{2m} F^+.s - (g-2)\frac{q}{2m} (s.F.u)u - \frac{g'q}{2m} (s.F^+.u)u$$

Pour T.B.M.T., M^{α} et ε^{β} sont les deux décompositions, pour un observateur donné, du moment magnéto-électrique $M^{\alpha\beta}$, c'est à dire :

$$M^{\alpha} = M^{\alpha\beta} n_{\beta} \Rightarrow (0, \vec{M})_n$$

$$\varepsilon^{\beta} = n_{\alpha} M^{\alpha\beta} \Rightarrow (0, \vec{E})_n$$

de la même manière que \vec{E} et \vec{B} sont les deux observations du tenseur champ électromagnétique F .

BACRY montrera, dans sa théorie, que ε^{β} est un vrai vecteur de l'espace de MINKOWSKI tandis que M^{α} sera généralisé en un tenseur antisymétrique de rang deux (qui ne se réduira à un vecteur que si $u = 0$).

$$* \boxed{s^2 = \text{cte}} \quad (6) \text{ en effet :}$$

$$s.\dot{s} = -\frac{q}{2m} q s.F.s - (g-2)\frac{q}{2m} (s.F.u)(s.u) = 0 \Rightarrow \frac{d s^2}{dt} = 0$$

($s.u = 0$ et $s.F.s = 0$ puisque F est antisymétrique).

Cela signifie que le degré de polarisation d'un faisceau de particules qui passe dans un champ électromagnétique uniforme et constant ne varie pas, seule la direction de la polarisation change.

BACRY, lui, obtiendra $(s^2 - \lambda^2)$ comme constante du mouvement.

- Utilisation de l'équation de THOMAS, BARGMANN, MICHEL et TELEGDI :

Dans les expériences utilisant le changement de direction du moment cinétique propre, on mesure le spin, les champs \vec{E} et \vec{B} dans le laboratoire. Il est donc intéressant d'avoir une équation donnant $\frac{d\vec{s}}{dt}$ en fonction des champs du repère de l'observateur, ou bien une équation donnant la variation de l'angle entre la vitesse de la particule et son spin, en fonction de ces mêmes vecteurs \vec{E} et \vec{B} .

$\frac{d\vec{s}}{dt}$ en fonction de \vec{E} et \vec{B} du laboratoire :

Le vecteur \vec{s} vu dans le laboratoire est le même que celui qui existe dans le repère propre car on admet [2] que l'observateur mesure le spin $L s$ où s est le spin dans le repère propre, L la transformation de LORENTZ qui fait passer de la particule au laboratoire.

L'évolution du spin est alors : [2], [5]

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = (\vec{\omega}_{Th} + \vec{\omega}_{Lar}) \times \vec{s} \quad (4) \text{ (repère du laboratoire)}$$

où $\vec{\omega}_{Th} = \frac{-\gamma^2 \vec{v} \times \vec{\Gamma}}{1+\gamma}$ est la précession de THOMAS

et $\left(\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$
 $\vec{\omega}_{Lar} = - \frac{q\vec{e}}{2m\gamma} \vec{\mathcal{B}}$ la précession de LARMOR

($\vec{\mathcal{B}}$ champ magnétique vu par la particule)

D'après les relations :

$$\vec{\mathcal{B}} = \vec{B} - \gamma \vec{v} \times \vec{E} - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (\vec{v}, \vec{E}, \vec{B} \text{ dans le laboratoire})$$

$$\vec{\Gamma} = \frac{q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}}{m\gamma} - \vec{v} \gamma^2 \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right)$$

On obtient : [6]

$$(8) \quad \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{2m} \left(g-2 + \frac{2}{\gamma} \right) \vec{s} \times \vec{B}' + \frac{e}{2m} (g-2) \frac{\gamma}{\gamma+1} (\vec{v} \cdot \vec{B}) (\vec{v} \times \vec{s}) + \frac{e}{2m} \left(g - \frac{2\gamma}{\gamma+1} \right) \vec{s} \wedge (\vec{E} \times \vec{v})$$

Cette formule, qui se déduit directement de l'équation T.B.M.T. est très pratique. Elle met en évidence les simplifications dans les différents cas suivants : $g = 2$, $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = 0$, $\vec{E} \parallel \vec{v}$, $\vec{E} \perp \vec{v}$, $\vec{B} \perp \vec{v}$, $\vec{B} \parallel \vec{v}$ etc...

$\frac{d\phi}{dt}$ en fonction de \vec{E} et \vec{B} du laboratoire : [1], [7]:

Soit $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$ où ϕ représente l'angle entre la vitesse de la particule et le spin. (schéma p 40).

Posons :

$$\begin{aligned} e_\phi &= (\gamma_0, \gamma \hat{v})_L = (0, \hat{v})_u & \text{avec } \hat{v} &= \frac{\vec{v}}{v} \\ e_r &= (0, \hat{n})_L = (0, \hat{n})_u & \text{en imposant } \hat{n}^2 &= 1 \text{ et } \hat{n} \cdot \hat{v} = 0. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$e_\phi^2 = e_r^2 = -1 \quad \text{et} \quad e_\phi \cdot e_r = 0$$

\hat{n} est pris dans le plan (\vec{s}, \hat{v})

On a :

$$\vec{s} = |\vec{s}| (\cos \phi \hat{v} + \sin \phi \hat{n}) \quad \text{dans le repère propre}$$

soit :

$$s = |\vec{s}| [(0, \cos \phi \hat{v}) + (0, \sin \phi \hat{n})]_u$$

De $s = (0, \vec{s})_u$ il vient $s^2 = -|\vec{s}|^2$.

et l'on définit

$$|s| = |\vec{s}| = \sqrt{-s^2}$$

Sous une écriture covariante :

$$\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \cos \phi \, \vec{e}_\phi + \sin \phi \, \vec{e}_\tau$$

Le calcul de $\frac{d\vec{s}}{dt}$ donne :

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \gamma |\vec{s}| \left(-\gamma v \Omega \sin \phi + \gamma \frac{dv}{dt} \cos \phi + v \frac{d\gamma}{dt} \cos \phi, -\Omega \gamma \hat{v} \sin \phi + \frac{d\gamma}{dt} \hat{v} \cos \phi + \gamma \frac{d\hat{v}}{dt} \cos \phi + \Omega \hat{n} \cos \phi + \frac{d\hat{n}}{dt} \sin \phi \right)_L$$

En considérant les différents termes de l'équation T.B.M.T., on obtient :

$$\begin{aligned} F.s &= -|\vec{s}| \left(\gamma \hat{v} \cdot \vec{E} \cos \phi + \hat{n} \cdot \vec{E} \sin \phi, \gamma v \vec{E} \cos \phi + (\gamma \cos \phi \hat{v} + \hat{n} \sin \phi) \times \vec{B} \right)_L \\ s.F.v &= -|\vec{s}| \left(\gamma \hat{v} \cdot \vec{E} v \cos \phi - \gamma^2 \cos \phi \hat{v} \cdot \vec{E} - \sin \phi \gamma \hat{n} \cdot \vec{E} - \gamma \sin \phi \hat{n} \cdot \vec{v} \times \vec{B} \right) \end{aligned}$$

Ω s'obtient alors en identifiant les coefficients de $\sin \phi$:

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{e}{m} \left[\left(\frac{\vec{E} \cdot \hat{n}}{v} \right) \left\{ \left(\frac{g}{2} - 1 \right) - \frac{g}{2\gamma^2} \right\} + \left(\frac{g}{2} - 1 \right) (\hat{v} \cdot \vec{B} \times \hat{n}) \right] \quad (9) \quad (\vec{E}, \vec{B}, \vec{v} \text{ du laboratoire})$$

Cette formule a les mêmes avantages que la précédente. Le terme provenant de la partie anormale du moment magnétique ($g \neq 2$) ressort bien. On s'intéresse, ici, évidemment plus à la vitesse de rotation du spin autour de la vitesse.

Dans la partie III, nous partirons directement de l'équation T.B.M.T. pour obtenir le mouvement de \hat{n} , \hat{v} , ϕ . Nous nous placerons dans le cas où $\vec{E} = 0$ et \vec{B} est perpendiculaire à \hat{v} . Les équations obtenues nous permettront d'étudier le mouvement de la polarisation du proton de désintégration du Λ^0 et ainsi d'avoir des renseignements sur le spin du Λ^0 .

II° PARTIE MOUVEMENT DE LA POLARISATION DANS LE CAS GENERAL : [2]

IIA - QUADRIPOTENTIEL VECTEUR CREE PAR UNE PARTICULE ET DEFINITION DES MOMENTS MULTIPOLAIRES RELATIVISTES :

Pour définir les moments multipôlaires en électromagnétisme classique, on considère un ensemble de charges q_i contenues dans un volume très petit. Les moments multipôlaires électriques sont alors obtenus par un développement limité du potentiel électrique $\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$ créé par ces charges ; de même les moments multipôlaires magnétiques se définissent dans le développement du potentiel vecteur $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i}{r_i}$ créé par ce même système de charges.

En relativité restreinte, il est donc naturel de définir les moments multipôlaires comme les termes qui apparaissent dans le développement limité du quadripotentiel vecteur $\mathcal{A} = (-\varphi, -\vec{A})$ créé par un système de charges q_i (φ est le potentiel scalaire et \vec{A} le potentiel vecteur).

Une particule sera donc considérée comme un système de charges q_i ponctuelles. Ceci est complètement différent des théories bilocales de HALBWACHS, VIGIER, ... [4] qui considèrent la particule comme un système continu, c'est à dire comme une masse étendue tournante relativiste.

Dans une première partie, on déterminera le quadrivecteur potentiel créé par une charge ponctuelle en mouvement, ce qui permettra d'obtenir le quadripotentiel créé par la particule, c'est à dire par un système de charges ponctuelles.

On effectuera ensuite un développement limité, ce qui donnera la définition des moments multipôlaires en relativité restreinte.

Leurs propriétés d'invariance seront alors étudiées.

On intégrera finalement l'équation pour obtenir le potentiel créé.

1) Quadripotentiel vecteur créé par une charge ponctuelle en mouvement :

Pour des charges en mouvement de densité spatiale ρ , de vitesse \vec{V} , on a les équations d'onde du champ :

$$\Delta \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \rho \vec{V} = 0$$

$$\Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \rho = 0$$

soit sous une forme covariante :

$$\boxed{\square \mathcal{A}(y) + j(y) = 0}$$

où $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ avec $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Il faut intégrer cette équation pour obtenir le quadri-vecteur potentiel \mathcal{A} créé au point y , connaissant le vecteur densité de courant de la particule dans l'espace temps.

Soit $x(\tau)$ l'équation paramétrique de la ligne d'univers décrite par la charge ponctuelle ; τ étant le temps propre.

Si $x = y$ à l'instant τ : $j(y) = q \dot{x}(\tau)$

si $x \neq y$ à l'instant τ : $j(y) = 0$

donc

$$j(y) = q \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x} \delta^4(y-x) d\tau$$

avec

$$\delta^4(y-x) = \delta^3(\vec{y}-\vec{x}) \delta(t-\tau)$$

De

$$\square \mathcal{A}(y) = -j(y), \text{ on tire :}$$

$$\square \frac{\partial \mathcal{A}(y)}{\partial y(z)} = -\delta^4(y-z)$$

La fonction $\frac{\partial \mathcal{A}(y)}{\partial y(z)}$ des deux points y et z est donc l'une des fonctions de GREEN de l'opérateur d'ALEMBERTIEN, et on aura alors :

$$\frac{\partial \mathcal{A}(y)}{\partial y(z)} = D(y-z)$$

soit

$$\mathcal{A}(y) = \int D(y-z) j(z) d^4z + \mathcal{A}'(y)$$

(Nous prendrons $\vec{A}'(y)$ tel que $\square \vec{A}'(y) = 0$, cela donnera
 $\square \vec{A}(y) = \square D(y-z) j(z) d^4z$ soit $\square \vec{A}(y) = - \int \delta^4(y-z) j(z) d^4z = -j(y)$
 c'est à dire $\square \vec{A}(y) + j(y) = 0$

Cherchons la fonction de GREEN telle que $\square D(u) = -\delta(u)$
 (u vecteur quelconque), on a :

$$\delta(u) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik \cdot u} d^4k$$

Considérons $D_R(u) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ik \cdot u}}{k^2} d^4k$

La fonction $D_R(u)$ vérifiera bien $\square D_R(u) = -\delta(u)$
 $D_R(u)$ est une solution du problème d'où :

$$\vec{A}(y) = q \int D_R(y-z) \dot{x} \cdot \vec{S}(z-x) d^4z d\tau \quad \text{soit :}$$

$$\vec{A}(y) = q \int D_R(y-x) \dot{x} d\tau$$

donc, finalement, le quadripotentiel vecteur créé par la charge
 en mouvement s'écrit :

$$\vec{A}(y) = q \int D_R(y-x) d^4x$$

La fonction de GREEN $D_R(u)$ s'écrit sous la forme :

$$D_R(u) = -\frac{1}{2\pi} \delta(u^2) \theta(u^0) \quad (\theta \text{ étant la fonction de HEAVISIDE})$$

$\delta(u^2)$ vérifie la relation $\square \delta(u^2) = 0$ et s'écrit aussi :

$$\delta(u^2) = \frac{1}{2|\vec{u}|} (\delta(u^0 - |\vec{u}|) + \delta(u^0 + |\vec{u}|)) \quad \text{d'où}$$

$$D_R(u) = -\frac{1}{4\pi|\vec{u}|} \delta(u^0 - |\vec{u}|)$$

(On ne considère que $u^0 > 0$ pour que $u^0 - |\vec{u}|$ puisse s'annuler)

La fonction de GREEN avancée $D_A(u) = -\frac{1}{2\pi} \delta(u^2) \theta(-u^0)$
 $= -\frac{1}{4\pi|\vec{u}|} \delta(u^0 + |\vec{u}|)$ est aussi solution de $\square D(u) = -\delta(u)$. Elle considère
 $u^0 < 0$ et c'est pour cette raison que l'on n'en tient pas
 compte.

2) Quadripotentiel vecteur créé par une particule en mouvement :

Considérant une particule comme la limite d'une molécule, c'est à dire comme un ensemble de charges q_i se déplaçant à l'intérieur d'un volume petit (ex : atome, molécule, ion...), il suffira de faire la sommation sur les charges pour obtenir le quadripotentiel vecteur créé par la particule en mouvement :

$$\mathcal{A}(y) = \sum_i q_i \int \dot{x}_i D_R(y - x_i) dt \quad (10)$$

Pour écrire cela, il faut néanmoins admettre que toutes les charges q_i ont le même temps propre τ . Les théories bilocales [4] considérant la particule comme un fluide ne se placent pas, en général, dans cette hypothèse. Ici, cela permet de considérer que la trajectoire de la molécule est représentée par une ligne d'univers L_0 d'équation $x(\tau)$. La charge ponctuelle q_i décrira une ligne d'univers L_i d'équation $x_i(\tau)$. On pose alors :

$$x_i(\tau) = x(\tau) + \xi_i(\tau) \quad (11)$$

par analogie avec le calcul de la physique classique. La définition (11) dépend, évidemment, du choix fait sur L_0 . Ce choix est à priori arbitraire ; autrement, il faut admettre qu'il existe un point particulier dans la particule, ce qui n'est pas toujours le cas. La relation (11) est très pratique pour définir les moments multipôlaire mais elle ne permet pas de retrouver les moments des différentes particules élémentaires.

On impose aux vecteurs infinitésimaux $\xi_i(\tau)$ d'être purement spatiaux dans le repère propre de la particule, c'est à dire la condition :

$$\dot{x} \cdot \xi_i = 0 \quad (12)$$

La relation (10) devient :

$$\mathcal{A}^M(y) = \sum_i q_i \int D_R(y-x-\xi_i) (\ddot{x}^M + \dot{\xi}_i^M) dt$$

Effectuons un développement limité de D_R au point $y - x$:

$$D_R(y-x-\xi_i) = D_R(y-x) - \xi_i^{\lambda_1} (\partial_{\lambda_1} D_R(y-x)) + \frac{1}{2} \xi_i^{\lambda_1} \xi_i^{\lambda_2} (\partial_{\lambda_1 \lambda_2} D_R(y-x)) + \dots$$

d'où :

$$(13) \quad \mathcal{A}^M(y) = \sum_i q_i \int D_R(y-x) (\ddot{x}^M + \dot{\xi}_i^M) dt - \sum_i q_i \int [\partial_{\lambda_1} D_R(y-x)] (\xi_i^{\lambda_1} \ddot{x}^M + \xi_i^{\lambda_1} \dot{\xi}_i^M) dt \\ + \frac{1}{2} \sum_i q_i \int [\partial_{\lambda_1 \lambda_2} D_R(y-x)] (\xi_i^{\lambda_1} \xi_i^{\lambda_2} \ddot{x}^M + \xi_i^{\lambda_1} \xi_i^{\lambda_2} \dot{\xi}_i^M) dt + \dots$$

3) Définition des moments multipôlaire en relativité restreinte :

En physique classique, on définit le moment multipolaire d'ordre 2^n comme le coefficient du terme en $\frac{1}{R^{n+1}}$. Il est donc naturel de définir, ici, le moment multipolaire d'ordre 2^n comme le terme intervenant dans l'intégrale contenant la dérivée $n^{\text{ième}}$ compte tenu du fait que D_R est déjà en $\frac{1}{R}$.

Donc

$$M(k) = \frac{1}{k!} \sum_i q_i \left[\xi_i^{\otimes k} \otimes \ddot{x} + \xi_i^{\otimes k} \otimes \dot{\xi}_i \right] \quad (14)$$

$M(k)$ est le moment global d'ordre k . C'est un tenseur de rang $k + 1$

- Moments statiques :

Il intervient deux termes bien distincts dans le moment global. En examinant le premier, on est conduit à poser :

$$S(k) = \frac{1}{k!} \sum_i q_i \xi_i^{\otimes k} \quad (15)$$

C'est un tenseur symétrique de rang k . On l'appelle moment statique d'ordre k car il ne contient pas de dérivée par rapport au temps.

$$\delta(0) = \sum_i q_i$$

le moment statique unipolaire représente donc la charge q de la particule.

$$\delta(1) = \sum_i q_i \vec{\xi}_i$$

Le moment statique dipolaire δ_1 est la généralisation relativiste du moment dipolaire électrique $\vec{\delta} = \sum_i q_i \vec{r}_i$ de l'espace à 3 dimensions.

D'après la relation (12) on a d'ailleurs dans le repère propre :

$$\delta = (0, \vec{\delta})_u = (0, \sum_i q_i \vec{\xi}_i)_u$$

Le moment dipolaire électrique se généralise donc, en relativité, en un vrai quadrivecteur et non pas en la partie électrique (polaire) d'un tenseur magnéto-électrique antisymétrique de rang deux.

$$\delta(2) = \frac{1}{2} \sum_i q_i \xi_i \otimes \xi_i$$

C'est le moment quadripolaire électrique en relativité restreinte. Sa partie spatiale est :

$$Q' = \frac{1}{2} \sum_i q_i \vec{\xi}_i \otimes \vec{\xi}_i$$

Le moment quadripolaire classique étant défini par :

$$Q_{cl} = \sum_i q_i (3 \vec{\xi}_i \otimes \vec{\xi}_i - \vec{\xi}_i^2)$$

on a donc :

$$\frac{1}{2} Q_{cl} = 3Q' - \text{tr } Q'$$

Il existe donc un très grand lien entre ces moments statiques et les moments électriques de la physique classique.

- Remarque :

La définition des moments multipôlaire étant relative à une ligne d'univers L_0 , comment la choisir ?

1er cas : $q \neq 0$:

On peut alors prendre pour L_0 la ligne d'univers qui passe par le centre de gravité des charges (qui n'est défini que si $\sum_i q_i \neq 0$). Elle est alors unique et par rapport à cette ligne :

$$\delta = \sum_i q_i \xi_i = 0$$

C'est à dire que l'on peut annuler le moment dipolaire électrique. (Par exemple les noyaux nucléaires ont une charge non nulle et ils auront donc un moment dipolaire électrique nul).

2ème cas : $q = 0$:

$\delta = \sum_i q_i \xi_i$ est alors un invariant, c'est à dire qu'il ne dépend pas de l'origine choisie (théorie des barycentres) ou encore qu'il est indépendant de la ligne d'univers de référence L_0 .

(Par exemple, on pourra associer à toute particule neutre [atome, molécule ...] un moment dipolaire électrique sans se soucier de l'origine choisie.)

En prenant comme modèle de particule un système de charges q_i , il est facile de choisir L_0 grâce au centre de gravité des charges. Les théories bilocales considérant une masse étendue relativiste, le problème est très difficile et il fait apparaître différentes notions : centre de gravité, centre de matière, pseudocentre de masse ... [4]

- Moments dynamiques :

En considérant le deuxième terme dans la définition (14), posons :

$$m(k) = \frac{1}{k!} \sum_i q_i \xi_i^{\otimes k} \otimes \dot{\xi}_i \quad (16)$$

C'est un tenseur de rang $k + 1$, symétrique en ses k premiers indices, appelé moment dynamique puisqu'il contient une dérivée par rapport au temps.

$$m(0) = \sum_i q_i \dot{\xi}_i$$

Le moment dynamique unipolaire $m(0)$ est la généralisation du moment magnétique d'ordre 0, $\sum_i q_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

$m(1) = \sum_i q_i \xi_i \otimes \dot{\xi}_i$ est le moment dipolaire dynamique relativiste.

$$m_1 = \frac{1}{2} \sum_i q_i (\xi_i \otimes \dot{\xi}_i + \dot{\xi}_i \otimes \xi_i) + \frac{1}{2} \sum_i q_i (\xi_i \otimes \dot{\xi}_i - \dot{\xi}_i \otimes \xi_i)$$

$$m_1 = \overline{m} + \hat{m}$$

où \overline{m} est la partie symétrique du tenseur m_1 et \hat{m} sa partie antisymétrique.

$$\hat{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \xi_i \wedge \dot{\xi}_i \quad (17)$$

La partie antisymétrique de m_1 est donc la généralisation relativiste du moment dipolaire magnétique $\frac{1}{2} \sum_i q_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$ de la physique classique. Il est donc fondamental de constater que, contrairement au vecteur dipolaire électrique \vec{S} qui se généralise en un quadrivecteur S , le vecteur \vec{m} de la physique classique se généralise en un tenseur antisymétrique de rang deux.

En général :

$$\hat{m} = (\vec{l}, \vec{w}) = \left(-\frac{1}{2} \sum_i q_i \dot{\xi}_i^0 \vec{\xi}_i, \frac{1}{2} \sum_i q_i \vec{\xi}_i \times \frac{d\vec{\xi}_i}{dt} \right)_u \quad (18)$$

Dans le cas particulier où $\dot{u} = 0$ (particule libre), on a :

$$\int_L u = 0 \Rightarrow \int_L \dot{u} + \int_L \dot{u} = 0 \Rightarrow \int_L \dot{u} = 0 \Rightarrow \int_L \dot{u} = 0 \text{ donc :}$$

$$\hat{m} = (0, \frac{1}{2} \frac{q}{c} \int_L \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt})_L$$

Dans le cas général, le vecteur \vec{l} n'a aucune raison d'être nul. On remarque enfin la grande analogie entre les moments magnétiques classiques et les moments dynamiques relativistes.

- Conclusion :

La relation (14) devient donc finalement :

$$M(k) = \delta(k) \otimes \dot{x} + m(k)$$

En particulier :

$$M_0 = q \otimes \dot{x} + \hat{\delta}$$

$$M_1 = \delta \otimes \dot{x} + \dot{Q} + \hat{m}$$

(en remarquant que $\overline{m(k)} = \delta(k+1)$).

Le moment global dipolaire n'est donc nullement un tenseur antisymétrique. Il se compose d'une partie antisymétrique \hat{m} , d'une partie symétrique \dot{Q} , d'une partie **asymétrique** $\delta \otimes \dot{x}$. D'ailleurs, le moment dipolaire dynamique $m (= \dot{Q} + \hat{m})$ n'est lui-même antisymétrique que si $\dot{Q} = 0$ c'est à dire $Q = \text{cte}$.

En considérant le cas très général d'une particule n'ayant pas d'autres moments que q, δ, Q, \hat{m} , on obtient comme potentiel créé :

$$(19) \quad \mathcal{A}^M(y) = \int D_R(y-x) (q \dot{x}^M + \dot{\delta}^M) dt - \int [D_{\lambda}(D_R(y-x))] (\delta^{\lambda} \dot{x}^M + \dot{Q}^{\lambda M} + \hat{m}^{\lambda M}) dt + \int [D_{\lambda_1 \lambda_2} D_R(y-x)] (Q^{\lambda_1 \lambda_2} \dot{x}^M) dt$$

4) Propriétés des moments multipôlaire :

Etudions le comportement des moments multipôlaire relativistes sous les transformations : inversion d'espace, inversion du temps, changement de ligne de référence.

- Variance des moments par inversion d'espace :

L'opérateur inversion d'espace relatif à l'observateur u est :

$$P(u) = 2u \otimes u - 1$$

car (n vecteur quelconque de $E(I, 3)$)

$$P(u) n = 2u (u \cdot n) - n = 2n^0 u - n = (n^0, -\vec{n})_u$$

$$(n = (n^0, \vec{n})_u)$$

En appliquant $P(u)$ à $M(k)$, cela donne :

$$P(u) \cdot M(k) = \frac{1}{k!} \sum_i q_i (2u(u \cdot \dot{x}_i) - \dot{x}_i) \otimes \dots \otimes (u + 2u(u \cdot \dot{x}_i) - \dot{x}_i) \text{ soit :}$$

$$P(u) \cdot M(k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_i q_i \dot{x}_i \otimes \dots \otimes (u + 2u(u \cdot \dot{x}_i) - \dot{x}_i) \text{ d'où :}$$

$$P(u) \cdot M(k) = (-1)^k [S(k) \otimes u - m(k) + 2u(m(k) \cdot u)]$$

Pour une particule accélérée, cette formule ne donne pas beaucoup de renseignements, mis à part :

$$P(u) \cdot \hat{m} = P(u) \cdot (\vec{t}, \vec{w})_u = (-\vec{t}, \vec{w})_u$$

qui prouve que \vec{t} est un vrai vecteur et \vec{w} un pseudovecteur.

Pour une particule libre : $\dot{u} = 0$ donc $\dot{x}_i \cdot u = 0$ (12) donc :

$$P(u) \cdot M(k) = (-1)^k [S(k) \otimes u - m(k)]$$

si k pair :

$$P(u) \cdot M(k) = [S(k) \otimes u - m(k)]$$

si k impair :

$$P(u) \cdot M(k) = [S(k) \otimes u + m(k)]$$

L'hypothèse d'invariance des moments sous la parité P entraîne donc la nullité des moments statiques $S(k)$ d'ordre impair et des moments dynamiques $m(k)$ d'ordre pair. En particulier $S = 0$, $S = 0$, $m(2) \neq 0$.

- Variance des moments par renversement du temps :

Il y a deux manières d'envisager le renversement du temps :

* renversement du temps par la transformation de LORENTZ T :

$$T(u) = I - 2 u \otimes u$$

qui donne

$$T_u (n^0, \vec{n})_u = (-n^0, \vec{n})_u$$

en particulier, l'énergie change de signe sous cette transformation.

On aura :

$$T(u) = u - 2 u (u.u) = -u$$

et

$$T(\xi_i) = \xi_i - 2 u (u.\xi_i) = \xi_i \quad \text{d'après (12)}$$

donc

$$T_L(u).M(k) = -S(k) \otimes u + m(k) - 2(m(k).u)u$$

et pour une particule libre : $(m(k).u = 0)$

$$T(u).M(k) = -S(k) \otimes u + m(k)$$

L'hypothèse d'invariance par renversement du temps entraîne la nullité des moments statiques.

* Transformation de WIGNER :

Après avoir effectué la transformation de LORENTZ, on change τ en $-\tau$ si bien que $u = \frac{dx}{dt}$ devient $-u$ et $\dot{\xi}_i = \frac{d\xi_i}{dt}$ devient $-\dot{\xi}_i$ d'où :

$$T_W(u).M(k) = S(k) \otimes u - m(k) + 2(m(k).u)u = -T_L(u)M(k)$$

pour une particule libre :

$$T_W(u).M(k) = S(k) \otimes u - m(k)$$

L'hypothèse d'invariance par renversement du temps entraîne alors la nullité des moments dynamiques.

(La transformation de WIGNER, elle, conserve le signe de l'énergie)

- Transformation des moments lors d'un changement de ligne de référence :

Considérons une autre ligne d'univers $L'_0 = y(\tau)$ ($L_0 = x(\tau)$)
Posons $a(\tau) = x(\tau) - y(\tau)$

Par rapport à L'_0 , les vecteurs ξ_i seront remplacés par les η_i tels que :

$$x + \xi_i = y + \eta_i = x_i$$

d'où :

$$\eta_i = \xi_i + a$$

On en tire les transformations ci-dessous pour les différents moments :

Moments statiques :

par rapport à L_0 :

$$\begin{aligned} \delta_0 &= q = \sum_i q_i \\ \delta_1 &= \delta = \sum_i q_i \xi_i \end{aligned}$$

$$\delta_2 = Q = \frac{1}{2} \sum_i q_i \xi_i \otimes \xi_i \quad \delta'_2 = \frac{1}{2} \sum_i q_i (\xi_i + a) \otimes (\xi_i + a) = Q + \frac{1}{2} (\delta \otimes a + a \otimes \delta + q a \otimes a)$$

par rapport à L'_0 :

$$\delta'_0 = \sum_i q_i = q \text{ invariant.}$$

$$\delta'_1 = \sum_i q_i (\xi_i + a) = \delta_1 + q a$$

Moments dynamiques :

$$\begin{aligned} L_0 : \\ m_0 &= \dot{\delta} \\ \overline{m}_1 &= \dot{Q} \end{aligned}$$

$$\widehat{m}_1 = \widehat{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \xi_i \wedge \dot{\xi}_i$$

$$\begin{aligned} L'_0 : \\ m'_0 &= \dot{\delta}' + q \dot{a} \\ \overline{m}'_1 &= \dot{Q}' + \frac{1}{2} (\delta \otimes \dot{a} + \delta \otimes a + \dot{a} \otimes \delta + a \otimes \dot{\delta} + q a \otimes \dot{a} + q \dot{a} \otimes a) \end{aligned}$$

$$\widehat{m}' = \widehat{m} + \frac{q}{2} a \wedge \dot{a} + \frac{1}{2} a \wedge \dot{\delta} + \frac{1}{2} \delta \wedge \dot{a}$$

Moments globaux :

L_0 :

$$M_0 = q \ddot{x} + \dot{\delta}$$

$$M_1 = \delta \otimes \ddot{x} + \dot{Q} + \widehat{m}$$

L'_0 :

$$M'_0 = q (\ddot{x} - \ddot{a}) + \dot{\delta}' + q \dot{a} = M_0 \text{ invariant}$$

$$M'_1 = M_1 + a \otimes M_0$$

- Remarques :

* δ se transforme en $\delta + q a$, cela montre bien que si $q = 0$ δ est un invariant ; tandis que si $q \neq 0$ on peut prendre a tel que $\delta + q a = 0$, c'est à dire trouver une ligne d'univers par rapport à laquelle le moment dipolaire électrique sera nul.

* si $q \neq 0$ et en prenant L_0 comme la ligne d'univers du centre de charges, nous venons de voir que $\delta/L_0 = 0$ d'où les relations dans ce cas :

$$\begin{aligned} \delta' &= q a & Q &= Q_0 + \frac{q}{2} a \otimes a \\ \hat{m}' &= \hat{m}_0 + \frac{q}{2} a \wedge \dot{a} & \text{et } \boxed{M'_1 = M_{10} + q a \otimes \dot{x}} & \quad (20) \end{aligned}$$

et en utilisant l'égalité : $a \otimes \dot{x} = \frac{1}{2} a \wedge \dot{x} + \frac{1}{2} (a \otimes \dot{x} + \dot{x} \otimes a)$

$$(21) \quad \boxed{\hat{M} = \hat{m}_0 + \frac{q}{2} a \wedge \dot{x}} \quad \text{et} \quad \hat{M} = \hat{Q}_0 + \frac{q}{2} (a \otimes \dot{x} + \dot{x} \otimes a)$$

dans la relation (20), $M_{10} = \hat{Q}_0 + \hat{m}_0$ représente le moment dipolaire propre, tandis que $q a \otimes \dot{x}$ représente le moment dipolaire orbital.

* Considérons le vecteur :

$$\boxed{W = \hat{M}^+ \cdot u}$$

$$W = \hat{m}_0^+ \cdot u + \frac{q}{2} (a \wedge u)^+ \cdot u = \hat{m}_0^+ \cdot u \quad (\text{d'après 21}).$$

Dans le cas où $q \neq 0$ et où $\delta = 0$, le vecteur W est indépendant du choix de a , c'est à dire de la ligne de référence.

On appelle W le vecteur polarisation magnétique de la particule.

Il y a une grande analogie avec le vecteur polarisation cinétique de la particule défini par WIGNER :

$$\sigma = S^+ \cdot p = m \cdot s$$

qui est, lui aussi, invariant par changement de ligne d'univers [9] (p 300).

* de la relation $\hat{m}' = \hat{m}_0 + \frac{q}{2} a \wedge \dot{a}$ (valable si $q \neq 0$ et $\delta = 0$), on tire que dans une translation d'espace ($\dot{a} = 0$) le moment dipolaire magnétique est un invariant.

5) Intégration de l'équation (19) pour obtenir le potentiel créé :

Pour obtenir le potentiel créé \mathcal{A} par la particule en mouvement, il faut intégrer l'équation (19), soit :

$$\mathcal{A}(y) = \int D_R(y-x) M(1) dt - \int \nabla \{ D_R(y-x) \} M(1) dt + \int \nabla^2 \{ D_R(y-x) \} M(2) dt$$

dans la relation :

$$D_R(y-x) = -\frac{1}{2\pi} \delta((y-x)^2) \theta(y^0 - x^0)$$

posons

$$\varphi(\tau) = (y-x)^2$$

$D_R(y-x)$ ne sera non nulle que pour la valeur de τ qui annule $\varphi(\tau)$ et telle que $y^0 > x^0$. Soit τ_0 cette valeur. On notera :

$$D_R(y-x) = -\frac{1}{2\pi} \delta((y-x)^2)$$

en se rappelant que $D_R(y-x)$ non nul est équivalent à $\tau = \tau_0$

x^0 est le temps où le champ, qui arrivera en y au temps y^0 , est émis par la particule. Il est donc normal d'imposer $y^0 > x^0$. $(y-x)^2 = 0$ revient à dire que la distance d'espace-temps entre les points y et x est nulle ; c'est à dire que la distance entre les points définis par \vec{x} et \vec{y} , $(\vec{y} - \vec{x})^2$, est égale à la distance que parcourra une onde électromagnétique pendant le temps $y^0 - x^0$ ($(y^0 - x^0)^2$).

Calculons le 2ème terme et le 3ème terme de l'équation ci-dessus :

$$\nabla \{ \delta(\varphi(\tau)) \} \cdot M(1) = 2(y-x) \delta'(\varphi(\tau)) M(1) \quad (\nabla \text{ n'agit que sur } y-x)$$

$$\begin{aligned} [\nabla^2 \{ \delta(\varphi(\tau)) \} M_2]^\mu &= \partial_{\lambda_1 \lambda_2} \{ \delta(\varphi(\tau)) \} M_2^{\lambda_1 \lambda_2 \mu} = \partial_{\lambda_1} \{ \delta'(\varphi(\tau)) 2(y-x)_{\lambda_2} \} M_2^{\lambda_1 \lambda_2 \mu} \\ &= \delta'(\varphi(\tau)) \partial_{\lambda_1} (2(y-x)_{\lambda_2}) M_2^{\lambda_1 \lambda_2 \mu} + \delta''(\varphi(\tau)) 2(y-x)_{\lambda_1} 2(y-x)_{\lambda_2} M_2^{\lambda_1 \lambda_2 \mu} \\ &= 2 \delta'(\varphi(\tau)) T_2 M_{(2)}^\mu + 4 \delta''(\varphi(\tau)) (y-x)^{\otimes 2} \cdot M_{(2)}^\mu. \end{aligned}$$

Posons $\boxed{\rho = y - x(\tau_0)}$ le vecteur tel que $\varphi(\tau_0) = \rho^2 = 0$
 Alors $\dot{\varphi}(\tau_0) = -2(y - x(\tau_0))\dot{x}(\tau_0) = -2\rho\dot{x}(\tau_0)$

De la formule $\delta(\varphi(\tau)) = \frac{1}{\dot{\varphi}(\tau)} \delta(\tau - \tau_0)$, il découle :

$$\int \delta(\varphi(\tau)) F(\tau) d\tau = \int \frac{1}{\dot{\varphi}(\tau)} \delta(\tau - \tau_0) F(\tau) d\tau = \frac{F(\tau_0)}{\dot{\varphi}(\tau_0)}$$

$$\int \delta'[\varphi(\tau)] F(\tau) d\tau = -\frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{F}{\dot{\varphi}} \right]_{\tau=\tau_0}$$

$$\int \delta''[\varphi(\tau)] F(\tau) d\tau = \frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{F}{\dot{\varphi}} \right) \right]_{\tau=\tau_0}$$

On en déduit :

$$* \int D_R(y-x) M_0 d\tau = - \int \frac{1}{2\pi} \delta[|y-x|^2] M_0 d\tau = \frac{M_0}{4\pi \rho \dot{x}(\tau_0)}$$

$$* - \int \nabla \{ D_R(y-x) \} M_{(1)} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int \nabla [\delta(\varphi(\tau))] M_{(1)} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int 2(y-x) M_1 \delta'(\varphi(\tau)) d\tau$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{2\rho \dot{x}(\tau_0)} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\rho \cdot M_1}{\rho \dot{x}} \right)_{\tau=\tau_0}$$

$$* \int \nabla^{\otimes 2} \{ D_R(y-x) \} M_{(2)} d\tau = -\frac{1}{2\pi} \int [4(y-x)^{\otimes 2} M_{(2)} \delta''(\varphi(\tau)) + 2 \text{Tr} M_{(2)} \delta'(\varphi(\tau))] d\tau$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-2\rho \dot{x}} \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{-2\rho \dot{x}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{4\rho \cdot M_{(2)} \cdot \rho}{-2\rho \dot{x}} \right) \right\} + \frac{1}{2\rho \dot{x}} \frac{d}{d\tau} \frac{2 \text{Tr} M_{(2)}}{-2\rho \dot{x}} \right]_{\tau=\tau_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{2\rho \dot{x}} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{\rho \dot{x}} \left\{ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\rho \cdot M_{(2)} \cdot \rho}{\rho \dot{x}} \right) + \text{Tr} M_{(2)} \right\} \right]_{\tau=\tau_0}$$

d'où finalement le champ créé par la particule polarisée en mouvement :

$$\boxed{\mathcal{A}(y) = \frac{1}{4\pi \rho \cdot u(\tau_0)} \left\{ M_0 - \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\rho \cdot M_1}{\rho \cdot u} - \frac{1}{\rho \cdot u} \left\{ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\rho \cdot M_2 \cdot \rho}{\rho \cdot u} \right) + \text{Tr} M_2 \right\} \right] \right\}_{\tau=\tau_0}}$$

Cette formule généralise celle des potentiels retardés de LIENARD-WIECHERT puisqu'elle tient compte des moments multipôlaire. Si on néglige ces moments, la relation, ci-dessus, donne :

$$A(y) = \frac{q \cdot v(t_0)}{4\pi r \cdot v(t_0)}$$

Dans le cas général d'une particule de charge q , sans moments dipolaire et quadripolaire électrique ($\mathcal{E} = Q = 0$) et sans moments électriques d'ordre plus élevé, n'admettant comme moment magnétique que le moment dipolaire \hat{m} , la relation se simplifie pour donner :

$$A = \frac{1}{4\pi r \cdot v} \left\{ q \cdot v - \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho \cdot \hat{m}}{\rho \cdot v} \right) \right\}_{t=t_0} \quad (22)$$

(particules élémentaires en général).

6) Généralisation des équations de MAXWELL pour la matière polarisée.

Les équations de MAXWELL pour la matière polarisée sont :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\rho \vec{v} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \nabla \times \vec{m}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho + \text{div} \vec{P}$$

où \vec{P} est le vecteur polarisation diélectrique et \vec{m} la densité de moment magnétique.

BACRY réexamine ces définitions dans le cas relativiste, avec sa théorie des moments multipôlaire et le quadripotentiel qui en résulte, il obtient :

$$\partial_\mu \partial^\nu A_\nu = \sum_k (-1)^k \partial^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} M_k \bar{M}_{\mu_1 \dots \mu_k} \nu$$

En passant aux équations tridimensionnelles, on obtient les équations de MAXWELL plus d'autres termes qui viennent des moments multipôlaire d'ordre plus élevé (par exemple div Q , etc..)

II B : MOUVEMENT DE LA PARTICULE POLARISEE PLACEE DANS UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE :

Ayant défini les moments multipôlares d'une particule (en considérant le champ qu'elle crée), nous pouvons maintenant étudier le mouvement de cette particule polarisée placée dans un champ électromagnétique quelconque et nous pourrions voir quelle est l'influence de cette polarisation sur le mouvement. Afin d'étudier celui-ci, nous définirons un lagrangien pour une particule polarisée placée dans un champ électromagnétique, et nous en déduirons, par dérivation, sa quantité de mouvement.

On pose :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi}) - \sum_i q_i (\dot{x}'' + \dot{\xi}'') \mathcal{A}_\mu(x + \xi_i) \quad (23)$$

$-\sum_i q_i (\dot{x} + \dot{\xi}_i) \mathcal{A}(x + \xi_i)$ représente l'énergie potentielle des charges q_i placées dans le champ extérieur \mathcal{A}_μ . $\mathcal{L}_0(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi})$ est donc le lagrangien de la particule en l'absence de champ extérieur \mathcal{A} . Il représente l'interaction des charges q_i , on admettra qu'elle est indépendante du champ extérieur \mathcal{A} .

Dans une première partie, en admettant certaines invariances, nous étudierons les conditions à imposer au lagrangien \mathcal{L}_0 . On calculera ensuite la quantité de mouvement p de la particule. Nous en déduirons l'équation de \dot{u} . On étudiera finalement dans quelles conditions l'équation de T.B.M.T. est un cas particulier de la théorie relativiste des moments multipôlares. Cette équation sera généralisée à un champ inhomogène.

On peut aussi noter que si la particule n'était pas polarisée, le problème serait bien plus simple ; il suffirait de prendre le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = m \sqrt{\dot{x}^2} - q \dot{x} \mathcal{A}$$

où $-q \dot{x} \mathcal{A}$ est l'énergie potentielle $= -\int \mathcal{A}'' = \delta(q\varphi - q\vec{v} \cdot \vec{A})$ et $m \sqrt{\dot{x}^2}$ l'énergie au repos de la particule.

(On obtient, par exemple, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} - q \mathcal{A}$ qui est bien l'impulsion habituelle).

1) Conditions de symétrie imposées au Lagrangien \mathcal{L}_0 :

En l'absence de champ extérieur \mathcal{A} , nous admettrons que le lagrangien $\mathcal{L}(\equiv \mathcal{L}_0)$ est invariant par translation et sous une transformation propre de LORENTZ.

- Invariance par translation :

$\mathcal{L}_0(x, \dot{x}, \{y_i, \dot{y}_i\})$ donne :

$$\delta \mathcal{L}_0 = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial y_i} \delta y_i \quad (\text{ou } y_i = x, \dot{x}, \{y_1, y_2, \dots, y_1, \dot{y}_2, \dots\})$$

Une translation infinitésimale δa donne :

$$\delta x = \delta a \quad \delta \dot{x} = 0 \quad \delta y_i = 0 \quad \delta \dot{y}_i = 0 \quad \text{donc}$$

$$\delta \mathcal{L}_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x} \delta a$$

L'invariance par translation entraîne donc :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x} = 0} \quad (24)$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \sum_i q_i (\dot{x} + \dot{y}_i) \mathcal{A}(x + \{y_i\})$ d'où :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}} - \sum_i q_i \mathcal{A}(x + \{y_i\})$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$ représente l'impulsion généralisée au sens de LAGRANGE.

$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}}$ est la quantité de mouvement p de la particule.

On retrouve bien la relation :

$$I = p + \sum_i q_i \mathcal{V}(x + \{y_i\}) + \sum_i q_i \vec{A}(x + \{y_i\})$$

de (24) et de l'équation d'EULER, on tire :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x} = 0, \quad \text{c'est à dire :}$$

$$\boxed{p = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}} = \text{cte}} \quad (25)$$

- Invariance sous une transformation propre de

LORENTZ

C'est une transformation qui conserve l'orientation du trièdre d'espace et le signe de la composante du temps (élément du groupe propre de LORENTZ).

Nous allons montrer que, si on admet l'invariance du Lagrangien \mathcal{L}_0 sous une telle transformation, le moment cinétique est un invariant.

Tout transformation propre étant le produit de transformations infinitésimales dans les différents plans $x^\alpha x^\beta$ (les cinq autres plans étant, à chaque fois, inchangés), il nous suffira donc de montrer que la composante $J_{\alpha\beta}$ est invariante sous une telle transformation infinitésimale pour en déduire l'invariance de J sous une transformation propre quelconque.

$$J = x \wedge p + \sum_i \{ \wedge p_i$$

Nous ne considérerons que la partie $J = x \wedge p$, d'où :

$$J_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$$

$$\delta \mathcal{L}_0 = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^\beta} \delta x^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta \dot{x}^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}^\beta} \delta \dot{x}^\beta$$

Une transformation infinitésimale dans le plan $x^\alpha x^\beta$ donne :

$$\delta x^\alpha = -\omega^{\alpha\beta} x_\beta \quad \delta \dot{x}^\alpha = -\omega^{\alpha\beta} \dot{x}_\beta$$

$$\delta x^\beta = -\omega^{\beta\alpha} x_\alpha \quad \text{et} \quad \delta \dot{x}^\beta = -\omega^{\beta\alpha} \dot{x}_\alpha$$

avec

$$\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$$

La matrice de la transformation étant $g_{\mu\nu} - \varepsilon \sum_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$ (MESSIAH T 2)

où ε est un infiniment petit et $\omega_{\mu\nu} = -\varepsilon \sum_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$

$$\delta \mathcal{L}_0 = 0 = -\omega^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^\alpha} x_\beta - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^\beta} x_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}_\beta - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}^\beta} \dot{x}_\alpha \right)$$

Soit :

$$\frac{d}{dt} \left(x_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}^\beta} - x_\beta \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha) = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad J_{\alpha\beta} = \text{cte} \quad \text{donc :}$$

$$J = x \wedge p + \sum_i \{ \wedge p_i = \text{cte}$$

Cela généralise l'invariance sous SO (3) du moment cinétique à trois dimensions \vec{J} .

- Invariance sous la transformation : $x \rightarrow x + \delta a, \xi_i \rightarrow \xi_i - \delta a$

\mathcal{L}_0 ne peut dépendre que de la position des charges de la particule ; c'est à dire de $x + \xi_i$. Il est donc invariant sous la transformation :

$$x \rightarrow x + \delta a \quad \xi_i \rightarrow \xi_i - \delta a \quad \text{donc :}$$

$$\delta \mathcal{L}_0 = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x} \delta a - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_i} \delta a \quad \text{qui donne :}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_i} = 0 \quad (26)$$

Avec les équations d'EULER : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x}$ et $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\xi}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_i}$

on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\xi}_i} \right) = 0$$

donc

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\xi}_i} = \text{cte}$$

soit

$$\boxed{p = \sum_i p_i} \quad (27)$$

avec $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\xi}_i}$ quantité de mouvement de q_i / centre de gravité des charges

de (24) et (26), on tire aussi :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_i} = 0}$$

Il est facile de vérifier que le moment cinétique est aussi invariant sous cette transformation.

$$J \rightarrow (x+a) \wedge p + \sum_i (\xi_i - a) \wedge p_i = x \wedge p + \sum_i \xi_i \wedge p_i + a \wedge (p - \sum_i p_i) = J$$

2) Quantité de mouvement de la particule polarisée
placée dans un champ électromagnétique :

A l'aide du Lagrangien (23), calculons la quantité de mouvement $p = \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \dot{x}^\mu}$ de la particule polarisée. Effectuons un développement limité du potentiel ϕ au point x (τ).

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(x, \dot{x}, \{v_\lambda, \dot{v}_\lambda\}) - \sum_i q_i (\dot{x}^\lambda + \dot{v}_\lambda^\lambda) [\phi(x)_\lambda + \partial_{v_\lambda} \phi(x)_\lambda] \left\{ v_1^{v_1} \dots \frac{1}{k!} \partial_{v_1} \dots \partial_{v_k} \phi(x)_\lambda \right\}^{v_1} \dots$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(x, \dot{x}, \{v_\lambda, \dot{v}_\lambda\}) - \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} q_i \frac{1}{k!} [\partial_{v_1} \dots \partial_{v_k} \phi(x)] \left\{ v_1^{v_1} \dots \left\{ v_k \left(\dot{x}^\lambda + \dot{v}_\lambda^\lambda \right) \right\} \right\}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}^\mu} = p_\mu - \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_i}{k!} [\partial_{v_1} \dots \partial_{v_k} \phi(x)] \left\{ v_1^{v_1} \dots \left\{ v_k \right\} \right\}$$

(car $\frac{\delta}{\delta \dot{x}^\mu} [(\dot{x}^\lambda + \dot{v}_\lambda^\lambda) \phi(x)] = \phi_{,\mu}(x)$)

En utilisant la relation $\frac{d\phi_{,\mu}(x)}{dt} = \frac{\partial \phi_{,\mu}(x)}{\partial x^{\nu_{k+1}}} \frac{dx^{\nu_{k+1}}}{dt}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}^\mu} \right) &= \dot{p}_\mu - \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_i}{k!} [\partial_{v_1} \dots \partial_{v_{k+1}} \phi_{,\mu}(x)] \left\{ v_1^{v_1} \dots \left\{ v_k \dot{x}^{\nu_{k+1}} \right\} \right\} \\ &\quad - \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_i}{k!} [\partial_{v_1} \dots \partial_{v_{k+1}} \phi_{,\mu}(x)] \left\{ v_1^{v_1} \dots \left\{ v_k \dot{v}_{\nu_{k+1}}^{\nu_{k+1}} \right\} \right\} \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x^\mu} &= - \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} q_i \frac{1}{k!} [\partial_{v_1} \dots \partial_{v_{k+1}} \phi_{,\mu}(x)] \left\{ v_1^{v_1} \dots \left\{ v_k \left(\dot{x}^{\nu_{k+1}} + \dot{v}_{\nu_{k+1}}^{\nu_{k+1}} \right) \right\} \right\} \end{aligned}$$

($\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta x^\mu} = 0$ et changement d'indice $\lambda \rightarrow \nu_{k+1}$)

L'équation d'EULER donne finalement :

$$\dot{p}_\mu = \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_i}{k!} [\partial_{v_1} \dots \partial_{v_k} F_{\nu_{k+1}\mu}(x)] \left\{ v_1^{v_1} \dots \left\{ v_k \left(\dot{x}^{\nu_{k+1}} + \dot{v}_{\nu_{k+1}}^{\nu_{k+1}} \right) \right\} \right\}$$

(car $F_{\nu_{k+1}\mu} = \partial_{\nu_{k+1}} \phi_{,\mu} - \partial_\mu \phi_{,\nu_{k+1}}$)

En posant $\nabla^{\otimes k} \otimes F = F(k+1)$ et en remarquant que les moments multipolaires s'introduisent naturellement dans \dot{p} (ce qui justifie leurs définitions) on obtient :

$$\dot{p} = \sum_{k=0}^{\infty} M(k) \cdot F(k+1) \quad (28)$$

C'est l'équation générale de l'évolution de la quantité de mouvement (\mathbf{p}) d'une particule polarisée (M_R) placée dans un champ électromagnétique F .

* Cas particulier de l'électron et des particules élémentaires telles que $S = Q = m(2) = 0$:

(28) devient :

$$\dot{\mathbf{p}} = e \cdot \mathbf{u} F + \hat{\mathbf{m}} \cdot (\nabla \otimes F) \quad (29)$$

Calculons $\hat{\mathbf{m}} \cdot (\nabla \otimes F)$ d'après la relation générale :

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^+ B^{+\beta}{}_{\lambda} &= B_{\alpha\beta} A^{\beta}{}_{\lambda} + \frac{1}{2} [A, B] g_{\alpha\lambda} \\ \text{donc } F^{+\mu\nu} M_{\nu S}^+ &= M^{\mu\nu} F_{\nu S} + \frac{1}{2} [M, F] g^{\mu S} \quad \text{d'où :} \\ \nabla_{\mu} M^{\mu\nu} F_{\nu S} &= \nabla_{\mu} F^{+\mu\nu} M_{\nu S}^+ - \frac{1}{2} \nabla_{\mu} g^{\mu S} [M, F] \end{aligned}$$

Il est très important de remarquer que, d'après la relation (29) ou (28), en aucun cas l'opérateur ∇ n'agira sur les moments multipolaires.

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} \nabla_{\mu} F_{\nu S} &= (\nabla_{\mu} F^{+\mu\nu}) M_{\nu S}^+ - \frac{1}{2} \nabla_S [M, F] \\ M \cdot (\nabla \otimes F) &= (\nabla \cdot F^+) \cdot M^+ - \frac{1}{2} \nabla [M, F] \end{aligned}$$

Les équations de MAXWELL imposent $\nabla \cdot F^+ = 0$ donc :

$$\boxed{\dot{\mathbf{p}} = e \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} - \frac{1}{2} \nabla (\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{F})} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{L}}, \vec{w}) \cdot (\vec{E}, \vec{B}) = [(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{m}})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}) - (\hat{\mathbf{m}}^+ \cdot \mathbf{u})(\mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{u})] = [-\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{E} + \vec{w} \cdot \vec{B}] \\ -\frac{1}{2} \nabla (\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{F}) &= \nabla (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{E} - \vec{w} \cdot \vec{B}) = \left(\vec{\mathcal{L}} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \nabla' (\vec{w} \cdot \vec{B} - \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{E}) \right) \end{aligned}$$

La relation covariante (30) s'écrit donc dans le repère propre :

$$\boxed{\dot{\mathbf{p}} = \left(-\vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\mathcal{L}} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, e \vec{E} + \nabla' (\vec{w} \cdot \vec{B} - \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{E}) \right)_{\mathbf{u}}} \quad (31)$$

* Remarques :

- La relation habituelle $p = m u$, entraîne $\dot{p} = m \dot{u}$ donc \dot{p} nulle puisque $\dot{u} = (0, \vec{F})_0$. D'après (31) $\dot{p} \neq 0$, cette relation n'est donc pas vérifiée et on est conduit à prendre :

$$\boxed{p = (m - \vec{w} \cdot \vec{B} + \vec{v} \cdot \vec{E}) u} \quad (32)$$

A l'énergie relativiste $m c^2$ (au repos) est rajoutée l'énergie électromagnétique d'interaction des moments de la particule avec le champ.

$$E_{\text{elec-mag}} = -\vec{w} \cdot \vec{B} + \vec{v} \cdot \vec{E}$$

Cette formule généralise l'énergie d'interaction d'un dipôle magnétique avec un champ \vec{B} , $E = -\vec{M} \cdot \vec{B}$.

E sert normalement à orienter \vec{M} sur le champ \vec{B} , mais étant donné la proportionnalité de \vec{S} et \vec{M} , cela se traduit par un effet gyroscopique, \vec{M} tourne autour de \vec{B} .

Cette énergie représente donc l'énergie de rotation propre.

On remarque que $-q \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}$ n'est pas ajoutée à $m c^2$.

Dérivons (32):

$$\dot{p} = (m - \vec{w} \cdot \vec{B} + \vec{v} \cdot \vec{E}) \dot{u} + \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{w} \cdot \vec{B} + \vec{v} \cdot \vec{E}) u$$

Soit :

$$\dot{p} = m \dot{u} + \left(-\vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) u$$

en admettant que $-\vec{w} \cdot \vec{B} + \vec{v} \cdot \vec{E} \ll m$ ce qui est tout à fait normal.

Il est donc très important de remarquer que, pour les valeurs numériques, on peut toujours admettre $p = m u$; mais alors que dans le cas de la particule libre ($\vec{B} = \vec{E} = 0 \Rightarrow -\vec{w} \cdot \vec{B} + \vec{v} \cdot \vec{E} = 0$) cette relation est rigoureuse et donne $\dot{p} = m \dot{u}$, dans le cas d'une particule accélérée cette relation est approchée (avec une très bonne précision) et n'entraîne pas $\dot{p} = m \dot{u}$ car la dérivée de $-\vec{w} \cdot \vec{B} + \vec{v} \cdot \vec{E}$ n'est pas négligeable tandis que celle de m est nulle.

- Equation de \dot{u} :

$$m\dot{u} = \dot{p} - \dot{p} \cdot u = \dot{p} - (\dot{p} \cdot u) u \quad \text{donc :}$$

$$m\dot{u} = e u \cdot F - \frac{1}{2} \nabla (M \cdot F) + \frac{1}{2} (u \cdot \nabla) (M \cdot F) u \quad (u \cdot F \cdot u = 0)$$

(D'où l'on tire d'ailleurs $m \dot{u} u = -\frac{1}{2} (\nabla u) (M \cdot F) + \frac{1}{2} (u \cdot \nabla) (M \cdot F) u^2 = 0 \Rightarrow u \dot{u} = 0$)

Dans le repère propre :

$$m\dot{u} = \left(0, e \vec{E} + \vec{\nabla} (\vec{w} \cdot \vec{B} - \vec{v} \cdot \vec{E}) \right)_u \quad (33)$$

Cette relation donne :

$$\vec{F} = e \vec{E} + \vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \quad \left(\vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}, \vec{e}_i \right)$$

C'est la force de LORENTZ $\vec{F} = e \vec{E} (\vec{v} = 0)$ à laquelle on doit ajouter le terme $\vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$ qui vient de ce que le champ est inhomogène.

(Ce gradient est, par exemple, utilisé dans l'expérience de STERN et GERLACH).

- Une équation analogue à l'équation (30) peut être obtenue à partir de l'équation de DIRAC du second ordre :

$$\left(p^2 + \frac{e}{2} \sigma \cdot F - m^2 \right) \psi = 0$$

En posant $\frac{e}{2m} \sigma = \hat{m}$ et en dérivant, il vient :

$$2 \frac{p \dot{p}}{m} + (\nabla \cdot u) (\hat{m} \cdot F) = 0 \quad \left((\nabla \cdot u) = \frac{\partial}{\partial H} \right)$$

En remplaçant p par $m u$ (ce qui est toujours valable mais qui n'entraîne pas $\dot{p} = m \dot{u}$), on obtient :

$$u \dot{p} = -\frac{1}{2} (\nabla \cdot u) (\hat{m} \cdot F)$$

qui est bien l'équation (30) contractée par u ($u \cdot F \cdot u = 0$)

- Dans le cas d'un moment dipolaire électrique δ non nul, (31) donne

$$\dot{p} = e u F + \dot{\delta} \cdot F + \widehat{m} (\nabla \otimes F) + (\delta \otimes \dot{x}) (\nabla \otimes F)$$

$$[(\delta \otimes \dot{x}) \cdot (\nabla \otimes F)]^\alpha = (\delta_\lambda \dot{x}_\mu) (\nabla^\lambda F^{\mu\alpha}) = (\delta_\lambda \nabla^\lambda) (u_\mu F^{\mu\alpha}) = (-\vec{\delta} \cdot \vec{\nabla}) E^\alpha \text{ donc :}$$

$$(\delta \otimes \dot{x}) \cdot (\nabla \otimes F) = (0, -(\vec{\delta} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E})_u$$

$$\dot{\delta} \cdot F = \left(\vec{\delta} \cdot \vec{F}_p, \frac{d\vec{\delta}}{dt} \cdot \vec{E} \right)_u = \left(\frac{d\vec{\delta}}{dt} \cdot \vec{E}, (\vec{\delta} \cdot \vec{F}_p) \vec{E} + \frac{d\vec{\delta}}{dt} \times \vec{B} \right)_u$$

(car $\delta \cdot u = 0$ comme $s \cdot u = 0$) soit finalement :

$$\dot{p} = \left(-\vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\ell} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{d\vec{\delta}}{dt} \cdot \vec{E}, e \vec{E} - (\vec{\delta} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + \vec{\nabla} (\vec{w} \cdot \vec{B} - \vec{\ell} \cdot \vec{E}) \right)_u$$

Il est ainsi clair que $\vec{\delta}$ et $\vec{\ell}$ ne représentent pas du tout la même chose.

- L'équation de T.B.M.T. utilise la relation $p = m u$ c'est à dire qu'elle néglige $-\vec{w} \cdot \vec{B} + \vec{\ell} \cdot \vec{E}$ devant m , ce qui n'est pas du tout grave dans les calculs. Comme pour cette équation, on suppose \vec{E} et \vec{B} constants

$$(31) \text{ donne : } \dot{p} = (0, e \vec{E})_u$$

et c'est bien ce qu'ils utilisent $\left(\dot{u} = -\frac{q}{m} F_{i0} \right)$

La seule approximation faite est donc $-\vec{w} \cdot \vec{B} + \vec{\ell} \cdot \vec{E} \ll m$

3) Généralisation de l'équation T.B.M.T. à des champs quelconques : [8] :

BACRY propose une généralisation de l'équation T.B.M.T. à des champs quelconques. Il reprend leurs hypothèses :

$$p = m u$$

$$\widehat{m} = (0, \vec{M})_u \quad \text{d'où} \quad \widehat{m} = -(\mathcal{M} \wedge u)^\dagger$$

$$\mathcal{M} = \frac{q e S}{2m}$$

(30) donne alors :

$$\dot{\mathbf{U}} = \frac{e}{m} \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} - \frac{1}{2m} \nabla(\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{F}) = \frac{e}{m} \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} + \frac{\hat{\mathbf{m}}}{m} (\nabla \phi F)$$

Au terme $\frac{e}{m} \mathbf{U} \cdot \mathbf{F}$, la force de LORENTZ, est ajoutée $\frac{1}{2m} \nabla(\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{F})$, c'est à dire $\vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial \mathbf{x}}$; cela est bien normal puisque le champ est inhomogène.

En partant de :

$$\dot{\mathbf{S}} = -(\mathbf{U} \wedge \mathbf{S}) \dot{\mathbf{U}} - (\mathbf{U} \wedge \mathbf{B})^{\dagger} \mu \quad (\text{T.B.M.T.})$$

on obtient :

$$\dot{\mathbf{S}} = -(\mathbf{U} \wedge \mathbf{S}) \left(\frac{e}{m} \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} \right) - (\mathbf{U} \wedge \mathbf{B})^{\dagger} \mu - (\mathbf{U} \wedge \mathbf{S}) \frac{\hat{\mathbf{m}}}{m} (\nabla \phi F)$$

Les deux premiers termes forment l'équation T.B.M.T. normale donc finalement :

$$\dot{\mathbf{S}} = -\frac{ge}{2m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} - (g-2) \frac{e}{2m} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{U}) \mathbf{U} - \frac{ge}{2m^2} (\mathbf{S} \wedge \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{S} \wedge \mathbf{U})^{\dagger} (\nabla \phi F)$$

Cette équation généralise donc celle de T.B.M.T. mais elle suppose $p = m$ u valable même pour des champs non constants.

IIC : MOUVEMENT DE LA POLARISATION D'UNE PARTICULE PLACÉE DANS UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE :

I) Polarisation décrite par le tenseur S, bilocalité :

Ayant défini une particule comme la limite d'une molécule, c'est à dire comme un ensemble de charges ponctuelles q_i contenues dans un volume infiniment petit, BACRY décompose naturellement le moment cinétique total J de la particule en une partie orbitale :

$$L = x \wedge p$$

et une partie de spin :

$$S = \sum_i \{ \wedge p_i$$

donc :

$$J = L + S = x \wedge p + \sum_i \{ \wedge p_i \quad (34)$$

La partie intrinsèque du moment cinétique est donc décrite par un tenseur antisymétrique de rang deux. Décomposons S sur la quantité de mouvement p (comme le font HALBWACHS, VIGIER, SOURIAU, [10] alors que FRENKEL utilise la vitesse unitaire u [4])

$$s = -\lambda \wedge p + (p \wedge \frac{s}{m})^+$$

en posant

$$\begin{aligned} s &= \frac{s^+ \cdot p}{m} \\ \lambda &= \frac{p \cdot s}{m^2} \end{aligned}$$

En portant dans (34) , on obtient :

$$J = (x - \lambda) \wedge p + \frac{1}{m} (p \wedge s)^+$$

Sous cette forme, on peut considérer que le moment orbital est celui du point $x - \lambda$.

D'une manière générale, on définit en bilocalité [4] :

x : coordonnées du centre de matière de la particule.

y : coordonnées du centre de gravité.

$\lambda = x - y$: vecteur de bilocalité.

On pose pour une particule libre :

- $p^2 = m^2$ avec m : masse propre d'impulsion.

m est un invariant

- $p \dot{x} = M_0$ M_0 : masse propre d'inertie.

M_0 a la dimension d'une masse mais est en général variable.

- $\dot{x} = u$

u représente donc le vecteur vitesse unitaire du centre de matière.

Considérons le cas important d'une particule libre :

Alors $\dot{t} = 0$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ et p est une constante du mouvement ainsi que le moment cinétique $J(\pi \beta 1)$ donc :

$$\dot{J} = 0 = \dot{x} \wedge p + \dot{s} \quad \text{d'où :}$$

$$\dot{s} = -\dot{x} \wedge p - x \wedge \dot{p} = -\dot{x} \wedge p$$

On a aussi :

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{p} \dot{s}}{m^2} = \frac{p \cdot \dot{s}}{m^2} = -\frac{(p \dot{x}) p + m^2 \dot{x}}{m^2}$$

d'où :

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\lambda} = \frac{(p \dot{x}) p}{m^2}$$

Le centre de gravité y a donc un mouvement rectiligne parallèle à l'impulsion p . Voyons si ce mouvement est uniforme et égal à $\frac{p}{m}$ [10]?

$$\dot{y} = \frac{M_0 p}{m^2}$$

mais \cdot est la dérivation par rapport au temps propre τ moyen, c'est à dire au temps propre de x . Si on prend la dérivation / par rapport à θ , temps propre au point y , il vient :

$$y'_\mu y'^\mu = 1 = \dot{y}_\mu \dot{y}^\mu \left(\frac{d\tau}{d\theta} \right)^2 = \frac{M_0^2}{m^4} m^2 \left(\frac{d\tau}{d\theta} \right)^2 \Rightarrow \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{m}{M_0} \quad \text{d'où :}$$

$$y'_H = \dot{y}_H \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{M_0}{m^2} p_H \frac{m}{M_0} = \frac{p_H}{m}$$

$$\boxed{y' = \frac{p}{m}}$$

donc :

C'est donc, dans le cas d'une particule libre, le centre de gravité qui a un mouvement rectiligne et uniforme égal à $\frac{p}{m}$. Le point x effectue, lui, un mouvement autour de y .

La plupart des théories bilocales ne considèrent pas $\lambda = 0$, même en l'absence de champ extérieur. BACRY, se plaçant dans le cadre de la théorie de MÖLLER, pose cependant $\lambda = 0$ pour une particule libre. Le centre de gravité et le centre de matière sont alors confondus et on en déduit :

$$\dot{x} = \dot{y} = \frac{(p\dot{x})}{m^2} p \Rightarrow p = \frac{m^2 x}{p \dot{x}} \quad \text{et comme } p^2 = m^2$$

il vient $p \dot{x} = m$ soit :

$$\boxed{p = m u} \quad (35)$$

Cette relation n'est donc valable, à priori, que si la particule est libre. C'est bien le résultat obtenu p (34) ; $\vec{E} = \vec{B} = 0 \Rightarrow p = m u$.

On en déduit alors :

$$\boxed{\dot{u} = 0}$$

et

$$\dot{S} = -\dot{x} \wedge p = -\dot{x} \wedge m \dot{x} = 0 \quad \text{c'est à dire}$$

$$\boxed{S = \text{constante du mouvement.}} \quad (36)$$

Il est important de souligner que, contrairement à la plupart des théories bilocales, la théorie relativiste des moments multipôlaire n'est pas une théorie hydrodynamique. La distinction entre centre de matière et centre de gravité est donc encore plus difficile.

T.B.M.T. , considérant les particules comme ponctuelles, posent $\lambda = 0$, que la particule soit libre ou non. Cela donne alors :

$$p = mu \quad \text{et}$$

$$S = (u \wedge s)^+ \quad \text{avec } s = S^+ \cdot u$$

Le quadrivecteur s suffit alors à décrire la polarisation d'une particule.

On peut, enfin, remarquer que le moment cinétique total J est le moment angulaire généralisé défini par BACRY dans [9] et que le vecteur polarisation s est celui qui a été utilisé par WIGNER.

2) Mouvement de la polarisation en fonction du champ extérieur et des moments multipôlaire :

En tenant compte de la bilocalité, nous avons été amenés à décrire la polarisation à l'aide d'un tenseur S anti-symétrique de rang deux. Etudions maintenant le mouvement de S en présence d'un champ électromagnétique quelconque. Les moments multipôlaire s'introduiront alors naturellement. L'équation obtenue (34) sera la généralisation de l'équation T.B.M.T.

x est le point où on effectue un développement limité de \mathcal{A} . On ne peut plus poser $\lambda = 0$ c'est à dire $x = y$. Les relations (35) et (36) ne sont donc plus valables.

La définition (23) implique :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_\mu} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\xi}_\mu} \right) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \sum_{k=0}^{\infty} q_i \frac{1}{k!} (\dot{x}^\lambda + \dot{\xi}_\nu^\lambda) [\partial_{\nu_1} \dots \nu_k \mathcal{A}_\lambda(x)] \left\{ \dots \right\}^{\nu_k} \right]$$

Les équations de LAGRANGE donnent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_\mu} = \dot{p}_{\mu} - \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_i \frac{1}{k!} [\partial_{\nu_1} \dots \nu_k \mathcal{A}_\mu(x)] \left\{ \dots \right\}^{\nu_k} \right)$$

En dérivant directement le Lagrangien \mathcal{L} , il vient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_i \frac{1}{k!} (\dot{x}^\lambda + \dot{\xi}_\nu^\lambda) [\partial_{\nu_1} \dots \nu_k \mathcal{A}_\lambda(x)] \left\{ \dots \right\}^{\nu_k} \right)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_\mu} + \sum_{k=0}^{\infty} q_i \frac{1}{k!} [\partial_{\nu_1} \dots \nu_k \nu_{k+1} \mathcal{A}_\mu(x)] \left\{ \dots \right\}^{\nu_k} (\dot{x}^{\nu_{k+1}} + \dot{\xi}_\nu^{\nu_{k+1}}) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} q_i \frac{1}{k!} (\dot{x}^{\nu_{k+1}} + \dot{\xi}_\nu^{\nu_{k+1}}) [\partial_{\nu_1} \dots \nu_k \mu \mathcal{A}_{\nu_{k+1}}(x)] \left\{ \dots \right\}^{\nu_k} \end{aligned}$$

et finalement :

$$\dot{p}_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_\mu} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} q_i \left\{ \dots \right\}^{\nu_k} (\dot{x}^{\nu_{k+1}} + \dot{\xi}_\nu^{\nu_{k+1}}) \partial_{\nu_1} \dots \nu_k F_{\nu_{k+1} \mu}$$

L'évolution de S est alors :

$$\begin{aligned}\dot{S}_{\lambda\mu} &= \sum_i \left(\dot{\xi}_i \wedge p_i \right)_{\lambda\mu} + \sum_i \left(\xi_i \wedge \dot{p}_i \right)_{\lambda\mu} \\ \dot{S}_{\lambda\mu} &= \sum_i \left(\dot{\xi}_i \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_i} \right)_{\lambda\mu} + \sum_i \left(\xi_i \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\xi}_i} \right)_{\lambda\mu} + \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} q_i \xi_i \left\{ \begin{matrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_k \end{matrix} \right\} \frac{\partial \mathcal{L}_{k+1}}{\partial \xi_i} F_{\nu_1 \dots \nu_k} \\ &\quad - \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} q_i \xi_i \left\{ \begin{matrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_k \end{matrix} \right\} \frac{\partial \mathcal{L}_{k+1}}{\partial \dot{\xi}_i} F_{\nu_1 \dots \nu_k} \\ \dot{S}_{\lambda\mu} &= \sum_i \left(\dot{\xi}_i \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_i} + \xi_i \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\xi}_i} \right)_{\lambda\mu} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) M_{\lambda}^{\nu_1 \dots \nu_k} F_{\nu_1 \dots \nu_k} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) M_{\mu}^{\nu_1 \dots \nu_k} F_{\nu_1 \dots \nu_k}\end{aligned}$$

soit :

$$\dot{S} = \sum_i \left(\dot{\xi}_i \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_i} + \xi_i \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\xi}_i} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (M_{(k+1)} \wedge F_{(k+1)})$$

En l'absence de champ électromagnétique, S est une constante du mouvement, la relation ci-dessus devient donc alors :

$$\dot{S} = 0 = \sum_i \left(\dot{\xi}_i \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_i} + \xi_i \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\xi}_i} \right)$$

L'équation du spin est finalement :

$$\boxed{\dot{S} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (M_{(k+1)} \wedge F_{(k+1)})} \quad (37)$$

C'est l'équation générale de l'évolution de la polarisation d'une particule polarisée quelconque placée dans un champ électromagnétique extérieur quelconque.

3) Conditions à imposer pour obtenir l'équation T.B.M.T. :

Déterminons quelles sont les différentes approximations que l'on doit faire pour passer de la relation (37) à l'équation T.B.M.T.

$$m \dot{S} = \dot{S}^+ \cdot p + S^+ \cdot \dot{p}$$

$$m \dot{s} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (M_{(k+1)} \wedge F_{(k+1)})^+ \cdot p + S^+ \cdot \dot{p}$$

On se limitera aux moments :

$$\begin{cases} M_0 = q u + \dot{S} \\ M_1 = S \otimes u + \dot{Q} + \hat{m} \\ M_2 = Q \otimes u \end{cases} \quad (\hat{m}(2) \text{ supposé nul})$$

En fait, toutes les particules élémentaires ou simples satisfont à cette hypothèse. On a $(A1) \wedge (A2)$:

$$(M_1 \wedge F)^+ = (\text{Tr } M_1) F^+ + M_1 \wedge F^+$$

et

$$[Q \otimes u \wedge (\nabla \otimes F)]^+ = (u \cdot Q) (\nabla \otimes F^+) + u \wedge [Q \cdot (\nabla \otimes F^+)] = (u \cdot Q) (F_{(2)}^+) + u \wedge [Q \cdot F_{(2)}^+]$$

$$\begin{aligned} \text{d'après (12)} \quad \delta \cdot u &= \sum_i q_i (\xi_i u) = 0 & \text{et} \\ Q \cdot u &= \frac{1}{2} \sum_i q_i \xi_i (\xi_i u) = 0 & \text{d'où :} \end{aligned}$$

$$\text{Tr } M_1 = \delta \cdot u + \text{Tr } \dot{Q} + \text{Tr } \hat{m} = \text{Tr } \dot{Q} \quad (\hat{m} \text{ antisymétrique})$$

On a donc :

$$m \dot{s} = [\text{Tr } \dot{Q} F^+ + (S \otimes u + \dot{Q} + \hat{m}) \wedge F^+ + 2u \wedge [Q \cdot F_{(2)}^+]] \cdot p + [-(\lambda A p)^+ - \frac{1}{m} p \wedge s] \dot{p}$$

En considérant des particules sans dipôle ni quadrupôle électriques (ce qui est très souvent le cas), il vient :

$$m \dot{s} = (\hat{m} \wedge F^+) \cdot p - [(\lambda A p)^+ + \frac{1}{m} p \wedge s] \dot{p} \quad (33).$$

Pour obtenir l'équation T.B.M.T. il nous faut d'abord admettre :

$$I^0) \quad p = m u$$

c'est à dire (35). Ceci n'est valable, en bilocalité, que si la particule est libre. Nous avons vu, néanmoins, (p 35) que pour un champ électromagnétique uniforme et constant, cette formule est quasiment vérifiée. $(-\vec{w} \cdot \vec{B} + \vec{v} \cdot \vec{E} \ll m)$.

2°) \hat{m} proportionnel à S .

Ceci est toujours admis.

3°) $\lambda = 0$

Cela revient à négliger la bilocalité pour une particule non libre ; c'est à dire à se restreindre à une particule classique sans étendue relativiste.

D'après la condition 2°) $\lambda = 0 \Rightarrow l = 0$ et donc :

$$\hat{m} = (u \wedge w)^+$$

La relation (38) donne alors :

$$\dot{S} = [(u \wedge w)^+ \wedge F^+] \cdot u - (u \wedge s) \dot{u}$$

Les relations A_3 et A_4 entraînent :

$$[(u \wedge w)^+ \wedge F^+] u = -[(u \wedge w) \wedge F] u = -[u (w \cdot F \cdot u) - w (u \cdot F \cdot u) - w \cdot F - (w \cdot u) (u \cdot F)]$$

$$= -u (w \cdot F \cdot u) + w \cdot F \quad (u \cdot F \cdot u = 0 \text{ car } F \text{ antisymétrique ; } w \cdot u = k \cdot s \cdot u = 0)$$

$$-(u \wedge s) \dot{u} = \dot{u} (u \wedge s) = (u \cdot \dot{u}) s - u (\dot{u} \cdot s) = -u (\dot{u} \cdot s)$$

$$-(u \wedge \dot{u}) s = s (u \wedge \dot{u}) = (s \cdot u) \dot{u} - u (s \cdot \dot{u}) = -u (\dot{u} \cdot s) \quad \text{d'où :}$$

$$-(u \wedge s) \dot{u} = -(u \wedge \dot{u}) s$$

donc :

$$\dot{S} = -(u \wedge \dot{u}) s - u (w \cdot F \cdot u) + w \cdot F$$

Cette équation est plus générale que celle de T.B.M.T. (77) puisque l'accélération \dot{u} est quelconque.

Pour obtenir la forme définitive (4) on doit finalement imposer :

$$\left[\begin{array}{l} w = \frac{q e}{2m} s \quad \text{et} \\ \dot{u} = \frac{-q}{m} F \cdot u \quad (39) \end{array} \right.$$

La relation (39) qui ne contient pas de gradient de F est uniquement valable pour un champ extérieur uniforme et constant. C'est cette équation qui restreint le domaine de validité de l'équation T.B.M.T.

Finalement, cette équation s'obtient à partir de la relation générale (37) en négligeant la bilocalité, en posant $p = mv$ et en se limitant à un champ électromagnétique uniforme et constant.

LIFSHITZ précise, dans [6], les conditions à imposer au champ électromagnétique. Le moment de la particule doit varier suffisamment lentement, c'est à dire que les champs \vec{E} et \vec{B} doivent être relativement petits, en particulier le rayon de LARMOR ($\sim \frac{p}{eB}$) dans le champ magnétique doit être grand par rapport à la longueur d'onde de la particule. Le champ magnétique ne doit aussi varier que très faiblement sur des distances de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de COMPTON ($\frac{1}{m}$) et de la longueur d'onde de la particule ($\frac{1}{p}$).

4) Evolution des vecteurs $\vec{\lambda}$ et \vec{s} ; discussion des résultats de KRAMERS, et conclusion :

Dans le cas d'une particule sans moment dipolaire ou quadrupolaire, la relation (37) donne (pour un champ électromagnétique quelconque) :

$$\dot{\vec{S}} = \frac{1}{m} \wedge \vec{F} \quad (40)$$

Cette équation a été écrite sous une autre forme par KRAMERS.

Quelles conclusions peut-on en tirer sur l'évolution des vecteurs $\vec{\lambda}$ et \vec{s} ?

En supposant, comme KRAMERS, $p = m u$, les décompositions des tenseurs antisymétriques de rang deux, \hat{m} , S , F sont :

$$\begin{aligned}\hat{m} &= u \wedge \ell + (u \wedge w)^+ \\ S &= m(u \wedge \lambda + (u \wedge s)^+) \\ F &= u \wedge E + (u \wedge B)^+\end{aligned}$$

(le λ devient $m \lambda$ pour pouvoir comparer avec les notations de KRAMERS)

On a alors :

$$\hat{m} \wedge F = (u \wedge \ell) \wedge (u \wedge E) + (u \wedge \ell) \wedge (u \wedge B)^+ + (u \wedge w)^+ \wedge (u \wedge E) + (u \wedge w)^+ \wedge (u \wedge B)^+$$

Les relations (A5) et (A6) donnent :

$$\begin{aligned}(u \wedge \ell) \wedge (u \wedge E) &= (\ell \cdot u)(u \wedge E) - (\ell \cdot E)(u \wedge u) - u^2(\ell \wedge E) + (u \cdot E)(\ell \wedge u) = -\ell \wedge E \\ (u \wedge w)^+ \wedge (u \wedge E) &= (w \cdot u)(u \wedge E)^+ - (w \cdot E)(u \wedge u)^+ - u^2(w \wedge E)^+ + (u \cdot E)(w \wedge u)^+ = -(w \wedge E)^+ \dots\end{aligned}$$

d'où :

$$\hat{m} \wedge F = -(\ell \wedge E) - (\ell \wedge B)^+ - (w \wedge E)^+ + w \wedge B$$

Les produits extérieurs s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}-(\ell \wedge E) &= (0, \vec{E}) \wedge (0, \vec{E}) = (0, -\vec{E} \times \vec{E})_u \\ -(\ell \wedge B)^+ &= [(0, \vec{B}) \wedge (0, \vec{E})]^+_u = (0, \vec{B} \times \vec{E})^+_u = (\vec{E} \times \vec{B}, 0)_u \\ w \wedge B &= (0, \vec{w} \times \vec{B})_u \\ -(w \wedge E)^+ &= (\vec{w} \times \vec{E}, 0)_u\end{aligned}$$

et finalement :

$$\hat{m} \wedge F = (\vec{w} \times \vec{E} + \vec{E} \times \vec{B}, \vec{w} \times \vec{B} - \vec{E} \times \vec{E})$$

d'autres parts :

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \dot{u} \wedge \lambda + u \wedge \dot{\lambda} + (\dot{u} \wedge s)^+ + (u \wedge \dot{s})^+ \\ \dot{u} \wedge \lambda &= (0, \vec{\Gamma}_p \times \vec{\lambda})_u & u \wedge \dot{\lambda} &= \left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt}, 0\right)_u \\ (\dot{u} \wedge s)^+ &= (-\vec{\Gamma}_p \times \vec{s}, 0)_u & (u \wedge \dot{s})^+ &= \left(0, \frac{d\vec{s}}{dt}\right)_u \\ \dot{S} &= \left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt} + \vec{s} \times \vec{\Gamma}_p, \frac{d\vec{s}}{dt} - \vec{\lambda} \times \vec{\Gamma}_p\right)_u\end{aligned}$$

de l'égalité (40) il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{s} \times \vec{\Gamma}_p &= \vec{v} \times \vec{B} + \vec{w} \times \vec{E} \\ \frac{d\vec{s}}{dt} - \vec{x} \times \vec{\Gamma}_p &= \vec{w} \times \vec{B} - \vec{v} \times \vec{E} \end{aligned} \quad (41)$$

Les termes contenant l'accélération $\vec{\Gamma}_p$ n'ont pas été obtenus par KRAMERS. Cela vient du fait qu'un vecteur $a = (0, \vec{a})_u$ n'a pas forcément une composante \vec{a}_0 nulle dans le repère instantané u puisque les repères changent à chaque instant.

Reprenons alors les relations (41) et Supposons :

$$M = \frac{ge}{2m} S \quad (42)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{ge}{2m} \lambda \\ \vec{w} &= \frac{ge}{2m} S \end{aligned}$$

on a, en tenant compte de :

$$m \vec{\Gamma}_p = e \vec{E} \quad (\text{force de LORENTZ dans } u, \quad \gamma=1, \vec{v}=0)$$

(Cette dernière relation suppose les champs uniformes et constants)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \frac{ge}{2m} \vec{x} \times \vec{B} + \left(\frac{g}{2} - 1\right) \frac{e}{m} \vec{s} \times \vec{E} \\ \frac{d\vec{s}}{dt} &= \frac{ge}{2m} \vec{s} \times \vec{B} - \left(\frac{g}{2} - 1\right) \frac{e}{m} \vec{x} \times \vec{E} \end{aligned} \quad (\vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ sont les champs vus par la particule).}$$

Nous devons donc considérer deux cas :

$$g = 2 \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{ge}{2m} \vec{x} \times \vec{B}$$

si \vec{x} est nul, il le restera.

$$g \neq 2$$

\vec{S} ne pourra demeurer nul.

Nous avons admis pour arriver à (41) que $p = m u$. C'est à dire nous avons négligé l'interaction $-\vec{w} \cdot \vec{B} + \vec{l} \cdot \vec{E}$ devant m .

Nous arrivons donc à la conclusion que, pour une particule dont on néglige les interactions, la possibilité d'une description ponctuelle est liée à $g = 2$. Or, toutes les particules, même l'électron, ont $g \neq 2$, c'est à dire qu'on ne devrait jamais négliger la bilocalité.

L'équation $\dot{\vec{S}} = M \wedge F$ a donc sur l'équation T.B.M.T. l'avantage d'être plus simple et d'être beaucoup plus générale : elle tient compte de la bilocalité et ne suppose rien sur le champ électromagnétique.

On peut, enfin, déterminer deux constantes du mouvement à partir de cette dernière relation. En admettant (42) on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\vec{S}} &= \frac{ge}{2m} \vec{S} \wedge F \\ \frac{2m}{ge} \dot{\vec{S}} \cdot \vec{S} &= \vec{S} \cdot (\vec{S} \wedge F) = 0 \\ &= 2 S^{\alpha\nu} S_{\gamma}{}^{\beta} F_{\beta\nu} = 2 S_{\alpha\nu} S_{\gamma}{}^{\beta} F_{\beta\nu} g^{\alpha\gamma} g^{\nu\mu} g^{\beta\mu} = -2 S_{\alpha\nu} S_{\gamma}{}^{\beta} F_{\beta\nu} g^{\alpha\gamma} g^{\nu\mu} g^{\beta\mu} \\ &= -2 S_{\alpha\beta} S_{\gamma\nu} F_{\beta\nu} g^{\alpha\gamma} g^{\nu\mu} g^{\beta\mu} = -2 S^{\alpha\nu} S_{\gamma}{}^{\beta} F_{\beta\nu} = 0 \end{aligned}$$

d'où :

d'où :

$$\vec{S} \cdot \dot{\vec{S}} = 0$$

de même

$$\vec{S}^+ \cdot \dot{\vec{S}} = 0 \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} \vec{S} \cdot \dot{\vec{S}} = 0 &\Rightarrow \dot{S}^2 = \dot{c}t = 2(S^2 - \lambda^2) = \dot{c}t \\ (\vec{S} \cdot \dot{\vec{S}})^+ &= \dot{\vec{S}} \cdot \vec{S}^+ + \vec{S} \cdot \dot{\vec{S}}^+ = \vec{S} \cdot \dot{\vec{S}}^+ = 0 \Rightarrow \vec{S} \cdot \dot{\vec{S}}^+ = 4\vec{A} \cdot \vec{S} = \dot{c}t. \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$S^2 - \lambda^2 = c t \quad \vec{A} \cdot \vec{S}$$

cte du mouvement.

Le champ électromagnétique est ici quelconque. Cela généralise le résultat de T.B.M.T. : S^2 constante du mouvement pour un champ F uniforme et constant.

IID : COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS PAR LA THEORIE CLASSIQUE [3] ET PAR LA THEORIE DE BACRY DANS L'ETUDE DE LA DIFFUSION DES RAYONS X MOUS PAR UNE CIBLE POLARISEE.

La diffusion des rayons X a d'abord été étudiée par THOMSON. En utilisant l'électromagnétisme classique, il détermine l'onde diffusée émise par la cible qu'accélère le champ incident. Dans son calcul, il ne tient évidemment pas compte du caractère corpusculaire du photon, ni de la polarisation de la cible.

Utilisant ce caractère corpusculaire du photon, COMPTON, à l'aide de la mécanique quantique et ondulatoire, réussit à expliquer le changement de fréquence observé expérimentalement. Lui, non plus, ne tient pas compte du moment magnétique de la cible.

KLEIN-NISHINA, à l'aide de la théorie quantique des champs, ont amélioré ces résultats et pris en considération le moment magnétique, mais ils supposent évidemment $g = 2$ comme dans la théorie de DIRAC (moment normal).

Aussi, BACRY préfère-t-il comparer sa théorie à celle de GELLMANN et GOLDBERGER qui tient compte du moment magnétique anormal et qui est aussi classique (c'est à dire non quantique). Ils réobtiennent d'ailleurs les mêmes résultats avec la théorie des champs et la mécanique quantique relativiste.

On se limite à la diffusion de photons incidents peu énergétiques ($h\nu$ du photon $\ll m_0 c^2$ de la cible). Cela permet (comme le montre les formules de COMPTON) de négliger la vitesse de recul de la cible ainsi que son changement de position, et surtout de rendre très faible le décalage de fréquence entre l'onde incidente et l'onde diffusée. L'amplitude de diffusion des photons, par une particule de spin $1/2$, peut alors être développée en série de puissances de la fréquence ν du photon incident.

Le 1er terme (indépendant de q) redonne l'amplitude de THOMSON et ne fait intervenir que la charge et la masse de la cible. Le terme en q dépend uniquement de la charge, de la masse et du moment magnétique du diffuseur. Il est donc très intéressant puisqu'il fait intervenir le moment magnétique normal et anormal de la cible.

Dans une première partie, on comparera les deux théories en donnant l'amplitude de diffusion (développée en puissance de q jusqu'au terme linéaire), ou plus simplement, le champ diffusé calculé des deux manières.

Les deux sections efficaces différentielles obtenues seront examinées dans une deuxième partie.

Enfin, on indiquera le terme en q^2 dans le développement du champ diffusé afin de montrer qu'il n'est pas du tout négligeable.

Nous ne donnons que l'essentiel. Les résultats sont explicités en détail dans [11].

I) Comparaison des champs électriques diffusés :

Le champ obtenu par GELL-MANN et GOLDBERGER est :

$$(43) \quad \vec{E}_{dif} = -\frac{1}{r} \left\{ \frac{e^2}{m} \vec{E} + i q^2 q \vec{n}' \times [\vec{S} \times (\vec{n} \times \vec{E})] + i \frac{e q g}{m} [(\vec{n} \cdot \vec{S})(\vec{n}' \times \vec{E}) + (\vec{n}' \cdot \vec{E})(\vec{n} \times \vec{S})] + i \frac{e q}{m} \left(\frac{e}{2m} + g_A \right) (\vec{S} \times \vec{E}) \right\}$$

où :

- \vec{E} est le champ électrique de l'onde incidente.
- \vec{n} et \vec{n}' les directions d'incidence et de diffusion.
- q la fréquence de l'onde incidente et de l'onde diffusée.

BACRY obtient :

$$(44) \quad 4\pi r \vec{E}_{dif} = \frac{e^2}{m} \vec{E} - i q \frac{e}{m} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{w})(\vec{n}' \times \vec{E}) + (\vec{n}' \cdot \vec{E})(\vec{n} \times \vec{w}) + \frac{g}{2} \vec{n}' \times (\vec{w} \times (\vec{n} \times \vec{E})) + \left(\frac{g}{2} - 1 \right) (\vec{w} \times \vec{E}) \right\}$$

Signalons d'abord les différences qui viennent des notations utilisées :

Le 4π dans (44) vient de ce que [2] prend $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ tandis que [3] pose $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi}$. BACRY obtient $\frac{e^2}{m} \vec{E}$ tandis que G.G. arrivent à $-e^2 \frac{\vec{E}}{m}$; cela vient du fait que le premier considère une onde $e^{i\vec{k}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}$ et le second $e^{i\vec{k}_0 \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$. Les termes en q ont le même signe dans les deux résultats car le signe opposé des deux champs se compense avec le signe de la dérivation qui donne iq .

Pour le moment magnétique, [2] et [3] prennent :

$$\vec{M}_{\text{total}} = g_G \vec{S} = \left(\frac{e}{m} + g_A \right) \vec{S} = \frac{g_B e}{2m} \vec{S} = \left[\frac{e}{m} + \frac{(g-2)e}{2m} \right] \vec{S} \quad (45)$$

d'où :

$$g_G = \frac{g_B e}{2m} \quad g_A = \frac{(g_B - 2)e}{2m}$$

(g_G est le rapport gyromagnétique, $\frac{e}{m}$ le rapport normal c'est à dire 2 fois le magnéton, et g_A la partie anormale).

On remarque alors que les termes obtenus par les deux méthodes sont les mêmes, sauf le dernier.

En posant :

$$a = \frac{g_B}{2} - 1$$

BACRY aboutit à :

$$-iq \frac{e}{m} a \frac{g_B e}{2m} \vec{S} \times \vec{E}$$

et G.G. à :

$$-iq \frac{e}{m} a \frac{e}{m} \vec{S} \times \vec{E}$$

La différence dans le cas de l'électron est insignifiante (g est très voisin de deux). Elle est beaucoup plus importante dans le cas d'un grand moment magnétique anormal (cas du nucléon par exemple).

* cas d'une particule neutre :

(46)

$$4\pi r \vec{E} \text{diff} = -iq g \mu_0 \left\{ \vec{n}' \times [\vec{w} \times (\vec{n} \times \vec{E})] + \vec{w} \times \vec{E} \right\}$$

pour BACRY

$$4\pi r \vec{E} \text{diff} = -iq g \mu_0 \left\{ \vec{n}' \times [\vec{w} \times (\vec{n} \times \vec{E})] \right\}$$

pour GELL-MANN -
GOLDBERGER

Il y a donc, dans le cas d'une particule neutre, une grande différence entre les deux résultats. La théorie relativiste des moments multipôlaire ajoute le terme $-iqg\mu_0 \vec{W} \times \vec{E}$.

($g\mu_0$ rapport gyromagnétique de la particule neutre). Ce terme ne dépend pas de la direction de diffusion \vec{n}' .

2) Comparaison des sections efficaces différentielles obtenues par les deux méthodes :

La section efficace de la diffusion par le moment magnétique peut se mettre sous la forme : (47)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q^2 e^4}{8m^4} [A + B \cos \phi + C \cos^2 \phi] \quad (47)$$

où ϕ est l'angle de diffusion.

G.G. obtiennent (pour la section efficace différentielle totale) :

$$(48) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{m^2} \left(\frac{1 + \cos^2 \phi}{2} \right) + q^2 \left[I(\phi) + \left\{ 6\mu^4 + \frac{e^2 \mu^2}{m^2} - \frac{e^3 \mu}{m^3} + \frac{3e^4}{8m^4} \right\} + \cos \phi \left\{ -\frac{8e\mu^3}{m} + \frac{2e^2 \mu^2}{m^2} \right\} + \cos^2 \phi \left\{ -2\mu^4 + \frac{3e^2 \mu^2}{m^2} - \frac{e^3 \mu}{m^3} - \frac{e^4}{8m^4} \right\} \right] + \dots$$

En posant : $a = \frac{g\mu_0}{2} - 1$ $g\mu_0 = 2\mu = \frac{g\mu_0 e}{2m}$ soit : $\mu = \frac{g\mu_0 e}{4m} = \frac{(a+1)e}{2m}$

on obtient à partir de (47) et (48) : (en ne tenant pas compte de $q^2 I(\phi)$) :

$$\begin{aligned} A &= 3a^4 + 12a^3 + 20a^2 + 12a + 4 \\ B &= -8a^3 - 20a^2 - 16a - 4 \\ C &= -a^4 - 4a^3 + 4a \end{aligned}$$

L'amplitude de diffusion calculée par BACRY donne :

$$\begin{aligned} A &= 6a^4 + 16a^3 + 18a^2 + 12a + 4 \\ B &= -4a^4 - 16a^3 - 24a^2 - 16a - 4 \\ C &= -2a^4 + 6a^2 + 4a \end{aligned}$$

Dans le cas d'une particule neutre, on obtient :

G.G.

B.

$$\begin{aligned} A &= 3 a^4 + 12 a^3 + 24 a^2 + 16 a + 4 \\ B &= - 8 a^3 - 20 a^2 - 16 a - 4 \\ C &= - a^4 - 4 a^3 - 4 a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 6 a^4 + 20 a^3 + 26 a^2 + 16 a + 4 \\ B &= -4 a^4 - 16 a^3 - 24 a^2 - 16 a - 4 \\ C &= -2 a^4 - 4 a^3 - 2 a^2 \end{aligned}$$

Dans les deux théories, les termes constants et du 1er ordre en a sont les mêmes. Si a est petit, l'accord entre les deux études est donc excellent (cas de l'électron par exemple).

Dans le cas d'un angle de diffusion petit ($\phi \sim 0, \cos \phi \sim 1$) : $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ est proportionnelle à $A + B + C$. G.G. obtiennent alors $2 a^4$ et BACRY 0.

Si a est petit, la différence est presque négligeable ; de toute manière, la diffusion par le moment magnétique est au mieux en a^4 , c'est à dire très faible. On peut enfin remarquer que les deux théories redonnent le même résultat en l'absence de moment magnétique anormal ($a = 0$).

Le 1er membre de (48) est la diffusion THOMSON ; le terme $q^2 I(\phi)$ est rajouté pour tenir compte de l'interaction du terme constant (diffusion THOMSON) avec le terme en q^2 dans l'amplitude de diffusion. Il représente essentiellement la diffusion RAYLEIGH (même type de diffusion que celle de THOMSON mais les électrons sont beaucoup plus liés à l'atome et les fréquences incidentes sont moins grandes ; en d'autres termes $q \gg \omega_0$ pour la diffusion T et $q \ll \omega_0$ pour la diffusion R où ω_0 est la fréquence propre de l'électron dans l'atome).

Nous allons donner maintenant le terme en q^2 dans le champ diffusé.

3) Terme en q^2 dans le champ diffusé :

BACRY, voulant comparer ses résultats à ceux de GELL-MANN et GOLDBERGER, s'arrête au terme en q dans l'amplitude de diffusion. Notre but est d'indiquer, dans le développement du champ diffusé, le terme en q^2 qui ne fait pas intervenir de changement de fréquence. A partir de la théorie de BACRY, nous trouvons :

$$4\pi r \vec{E}_{dif} = \frac{e^2}{m} \vec{E} - iq \frac{e}{m} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{w})(\vec{n} \times \vec{E}) + (\vec{n}' \cdot \vec{E})(\vec{n}' \times \vec{w}) + \frac{q}{2} \vec{n}' \times (\vec{w} \times (\vec{n} \times \vec{E})) + \left(\frac{q}{2} - 1\right)(\vec{w} \times \vec{E}) \right\} - \frac{q^2}{m} (\vec{n}' \cdot \vec{n})(\vec{w}, \vec{n}, \vec{E})(\vec{n}' \times \vec{w})$$

Les termes constant, linéaire, en q^2 sont, à chaque fois, dans un rapport d'à peu près $\frac{1}{50\ 000}$ si bien qu'on peut en déduire que l'interaction du terme constant et du terme en q^2 est du même ordre de grandeur que la diffusion provenant du terme en q , donc pas du tout négligeable. GELL-MANN et GOLDBERGER indiquent même que cette interaction (Diffusion THOMSON-RAYLEIGH) est plus grande que la diffusion par le moment magnétique (terme en q). Ils donnent approximativement un rapport de 10, si bien que les différences apparaissant dans la section efficace du terme en q entre la théorie relativiste des moments multipôlaires et la théorie classique, seront pratiquement inobservables expérimentalement.

Il est, enfin, intéressant de comparer les deux études en examinant leurs idées directrices.

Partant d'un Lagrangien non relativiste et considérant le moment magnétique comme un trivecteur, GELL-MANN et GOLDBERGER sont amenés, comme le montre l'équation T.B.M.T., à séparer ce moment en une partie normale et une partie anormale. Le facteur 1/2 de THOMAS ne s'appliquant que sur le moment normal, les deux parties ont un comportement (au point de vue électromagnétique) très différent.

Au contraire, la théorie relativiste des moments multipôlaires, partant d'un Lagrangien quadridimensionnel, considère le moment magnétique comme un tenseur antisymétrique de rang deux et ne le sépare pas, évidemment, en une partie normale et anormale. Il ne s'introduira donc pas de facteur 1/2 de THOMAS.

BACRY obtient, d'ailleurs, des équations semblables à celles de GELL-MANN et GOLDBERGER, mais ses équations ne contiennent pas le facteur 1/2 de THOMAS. Il n'y a plus de distinction apparente entre les moments magnétiques normal et anormal.

Il intervient, dans les calculs de BACRY, un terme en $\frac{d\vec{p}}{dt}$. Or, nous avons vu qu'à la rigueur $\frac{d\vec{p}}{dt}$ est nul si $g = 2$, mais que $\frac{d\vec{p}}{dt} \neq 0$ si $g \neq 2$. C'est le vecteur $\frac{d\vec{p}}{dt}$ qui introduit une différence de comportement entre un moment normal ($g = 2$) et un moment anormal.

La distinction entre parties normale et anormale vient donc fondamentalement de ce que le moment magnétique est un tenseur antisymétrique de rang deux (c'est à dire de l'existence du vecteur \vec{p}).

III° PARTIE POLARISATION DU Λ^0 :

Le spin du Λ^0 est 1/2. Ceci a été démontré à partir de l'étude de la désintégration faible $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$, et, en particulier par l'analyse de la diffusion du proton de désintégration par un proton cible de la chambre à bulles. Cette chambre étant placée dans un champ magnétique, le spin précesse et le proton est dévié.

Nous montrerons que l'étude du mouvement de la polarisation de la particule peut se faire à partir de l'équation T.B.M.T.

LEE et YANG [12] ont montré que :

$$-\frac{1}{2J+2} \leq \langle \cos \theta \rangle \leq \frac{1}{2J+2}$$

où θ est l'angle entre le moment \hat{p}^* du proton de désintégration (dans le système propre du Λ^0) et une direction quelconque (par exemple la perpendiculaire \hat{n}_1 au plan de production). (Schéma p 67)

La moyenne $\langle \cos \theta \rangle$ est faite sur la distribution angulaire du proton $\frac{1}{2} g(\cos \theta) d \cos \theta$

J est le spin du Λ^0 .

Ils montrent même que si la distribution g est linéaire en $\cos \theta$, c'est à dire :

$$g(\cos \theta) = 1 + a \cos \theta \quad (49)$$

alors :

$$-\frac{1}{6J} \leq \langle \cos \theta \rangle \leq \frac{1}{6J} \quad (50)$$

Ces deux relations fondamentales permettront, d'après l'expression de $g(\cos\theta)$, d'exclure les spins $3/2$, $5/2$ etc... pour le Λ^0 (le spin du Λ^0 devant être demi-impair d'après la conservation du moment cinétique). On voit donc toute l'importance qu'il y a à déterminer expérimentalement la distribution angulaire du proton de désintégration.

IIIA : DISTRIBUTION ANGULAIRE SI $S_{\Lambda^0} = 1/2$

I) Asymétrie dans la désintégration $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$

Si l'on suppose $S_{\Lambda^0} = 1/2$, le système $(p - \pi^-)$ ne peut se trouver que dans les états $S_{1/2}$ ou $P_{1/2}$ (conservation de J).

Soient :

ψ^+ la fonction d'onde d'espace et de spin pour l'état $(J, J_z) = (1/2, +1/2)$

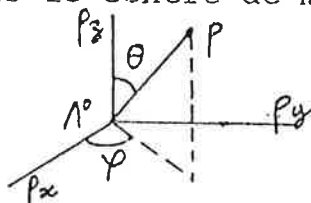
ψ^- la fonction d'onde pour l'état $(J, J_z) = (1/2, -1/2)$

et

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right) ; \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

les états du spin du proton.

Posons dans le centre de masse du Λ^0 :



θ et φ angles polaire et azimuthal de l'émission du proton
 p_z direction du spin du Λ^0 . ($\equiv \hat{n}_1$)

Le moment angulaire orbital du système $(\pi^- - p)$ est alors donné par les harmoniques sphériques $Y_e^m(\theta, \varphi)$

Soient S et P les amplitudes correspondant à $L = 0$ et $L = 1$.
A partir de la table des CLEBSCH - GORDAN :

	$\psi_{3/2}^0$	$\psi_{3/2}^{1/2}$	$\psi_{3/2}^{1/2}$	$\psi_{3/2}^{-1/2}$	$\psi_{3/2}^{-1/2}$	$\psi_{3/2}^{-3/2}$
$1\ 1/2 >$	1					
$1\ -1/2 >$		$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$			
$1\ 0\ 1/2 >$		$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{1/3}$			
$1\ 0\ -1/2 >$				$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{1/3}$	
$1\ -1/2 >$				$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{2/3}$	
$1\ -1/2 >$						1

On obtient :

$$\psi^+ = S Y_0^0 \psi_1 + P \left[\sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^1 \psi_2 - \sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^0 \psi_1 \right]$$

$$\psi^- = S Y_0^0 \psi_2 + P \left[\sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^0 \psi_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^{-1} \psi_1 \right]$$

Les harmoniques sphériques étant données par :

$$Y_0^0 = 1$$

$$Y_1^{+1} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \exp[i\varphi]$$

$$Y_1^0 = \sqrt{3} \cos \theta$$

$$Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \exp[-i\varphi]$$

on a :

$$\psi_+ = (S - P \cos \theta) \psi_1 - P \sin \theta \exp[i\varphi] \psi_2$$

$$\psi_- = (S + P \cos \theta) \psi_2 - P \sin \theta \exp[-i\varphi] \psi_1$$

D'après :

$$\psi_2^+ \psi_2 = \psi_1^+ \psi_1 = 1 \quad \text{et} \quad \psi_2^+ \psi_1 = \psi_1^+ \psi_2 = 0$$

il vient :

$$|\psi_+|^2 = |S|^2 + |P|^2 - 2 \Re_e(S^* P) \cos \theta$$

$$|\psi_-|^2 = |S|^2 + |P|^2 + 2 \Re_e(S^* P) \cos \theta$$

On définit les paramètres α, β, γ par :

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{Re}(S^* \cdot P)}{|S|^2 + |P|^2} \quad \beta = \frac{2 \operatorname{Im}(S^* \cdot P)}{|S|^2 + |P|^2} \quad \gamma = \frac{|S|^2 - |P|^2}{|S|^2 + |P|^2}$$

d'où :

$$|\Psi_+|^2 = [|S|^2 + |P|^2] [1 - \alpha \cos \theta]$$

$$|\Psi_-|^2 = [|S|^2 + |P|^2] [1 + \alpha \cos \theta]$$

Si les Λ^0 sont partiellement polarisées avec une fraction f_+ dans l'état Ψ_+ et une fraction f_- dans l'état Ψ_- , la distribution angulaire de désintégration est :

$$|\Psi|^2 = f_+ |\Psi_+|^2 + f_- |\Psi_-|^2$$

$$|\Psi|^2 = [|S|^2 + |P|^2] (1 - \alpha_{\Lambda^0} P_{\Lambda^0} \cos \theta)$$

(52)

avec

$$P_{\Lambda^0} = (f_+ - f_-) / (f_+ + f_-)$$

Cette distribution est bien de la forme (49).

On a aussi :

$$-\alpha_{\Lambda^0} P_{\Lambda^0} = 2 \cdot \frac{|\Psi|_{\theta < \frac{\pi}{2}}^2 - |\Psi|_{\theta > \frac{\pi}{2}}^2}{|\Psi|_{\theta < \frac{\pi}{2}}^2 + |\Psi|_{\theta > \frac{\pi}{2}}^2}$$

Si la parité était conservée, on aurait autant de protons émis dans la direction du spin que dans la direction opposée et par conséquent $\alpha_{\Lambda^0} P_{\Lambda^0} = 0$.

La valeur, non nulle, de $-\alpha_{\Lambda^0} P_{\Lambda^0}$ mesure donc la dissymétrie "haut-bas" dans la désintégration ainsi que la violation de la conservation de la parité.

Les distributions angulaires déterminées expérimentalement ne donnent pas α_{Λ^0} mais simplement $\alpha_{\Lambda^0} P_{\Lambda^0}$: $|P_{\Lambda^0}| \leq 1$ d'où :

$$|\alpha_{\Lambda^0}| \geq |\alpha_{\Lambda^0} P_{\Lambda^0}|$$

Les mesures de CRAWFORD [3] donnent, pour 353 désintégrations observées :

215 avec $\theta < \frac{\pi}{2}$

138 avec $\theta > \frac{\pi}{2}$

d'où :

$$\alpha_{\Lambda^0} = 0,44 \pm 0,11$$

La valeur de $\langle \cos \theta \rangle$ est alors compatible avec la relation dans laquelle on prend $J = 1/2$

$$|\langle \cos \theta \rangle| \leq 1/3$$

si bien que la valeur $1/2$ est admissible pour le spin du Λ^0 .

2) Paramètre α_{Λ^0} :

Pour mesurer le paramètre d'asymétrie α_{Λ^0} , on peut étudier la polarisation du proton de désintégration du Λ^0 . Le principe de l'expérience est le suivant : (schéma p 67)

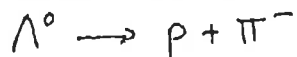
le Λ^0 est émis dans la réaction forte :



(le faisceau de π^- arrive sur les protons de la chambre à bulles)

La parité étant conservée dans les interactions fortes, le plan de production est un plan de symétrie et le spin du Λ^0 , vecteur axial, doit lui être perpendiculaire. (c'est bien ce qui est observé)

le Λ^0 se désintègre alors selon :



(réaction faible avec non conservation de la parité)

Le p de désintégration étant soumis à un champ magnétique, est dévié et son spin précesse. Il est, enfin, diffusé par un proton cible.

Dans une première partie, nous déterminerons, à l'aide des matrices densités, la polarisation générale du proton émis. Nous donnerons, de même, l'expression à utiliser dans la diffusion $p - p$.

Dans une deuxième partie, à l'aide de l'équation T.B. M.T., nous calculerons le mouvement du proton et de sa polarisation placée dans le champ magnétique.

a) Polarisation du proton émis :

Nous avons vu que la direction de polarisation du Λ^0 ne peut être que la perpendiculaire au plan de production si on admet la conservation de la parité. Si on suppose que le spin du Λ^0 est $1/2$, on obtient pour sa matrice densité (matrice 2×2 car $2s + 1 = 2$) :

$$\rho_i = 1/2 I (1 + \hat{p}_0 \cdot \hat{n}_1 \cdot \vec{\sigma}) \quad (53)$$

où $\hat{p}_0 \cdot \hat{n}_1$ est la polarisation du Λ^0 (fonction de l'angle de production)

$\vec{\sigma}$ représente les matrices de PAULI habituelles.

I est l'intensité du faisceau.

La matrice de la désintégration s'écrit (pour la partie spin) :

$$M = S + P \hat{p}^* \cdot \vec{\sigma} \quad (54)$$

où S et P sont les amplitudes des ondes pour $L = 0$ et $L = 1$ définies précédemment. ($P \hat{p}^* \cdot \vec{\sigma}$ est un scalaire ; comme \hat{p}^* est un vecteur et $\vec{\sigma}$ un pseudovecteur, P est un pseudoscalaire tandis que S est un vrai scalaire).

La matrice densité du proton de désintégration se calcule alors à partir de :

$$\rho_f = M \rho_i M^+ \quad (55)$$

D'après la formule de DIRAC :

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) (\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$$

et sachant que les matrices de PAULI sont hermitiennes, on obtient

$$P_f = \frac{1}{2} I (S + P \hat{p}^* \cdot \vec{\sigma}) (1 + p_{n0} \hat{n}_1 \cdot \vec{\sigma}) (S^* + P^* \hat{p}^* \cdot \vec{\sigma})$$

$$P_f = \frac{I}{2} (|S|^2 + S P^* \hat{p}^* \cdot \vec{\sigma} + P S^* \hat{p}^* \cdot \vec{\sigma} + |P|^2 + |S|^2 p_{n0} \hat{n}_1 \cdot \vec{\sigma} + S P^* p_{n0} (\hat{n}_1 \cdot \hat{p}^*) + i S P^* p_{n0} (\hat{n}_1 \times \hat{p}^*) \cdot \vec{\sigma} + S^* P p_{n0} (\hat{p}^* \cdot \hat{n}_1) + |P|^2 p_{n0} (\hat{p}^* \cdot \hat{n}_1) (\hat{p}^* \cdot \vec{\sigma}) + i S P^* p_{n0} (\hat{p}^* \times \hat{n}_1) \cdot \vec{\sigma} - |P|^2 p_{n0} [(\hat{p}^* \cdot \hat{n}_1) \hat{p}^* + \hat{n}_1] \cdot \vec{\sigma})$$

$$P_f = \frac{I}{2} (|S|^2 + |P|^2 + 2 p_{n0} \Re_e(S P^*) (\hat{p}^* \cdot \hat{n}_1)) \left[1 + \frac{2 \Re_e(S P^*) \hat{p}^* \cdot \vec{\sigma}}{|S|^2 + |P|^2 + 2 p_{n0} \Re_e(S P^*) (\hat{p}^* \cdot \hat{n}_1)} + \frac{-2 \Im(S P^*) p_{n0} (\hat{p}^* \times \hat{n}_1) \cdot \vec{\sigma} + 2 |P|^2 p_{n0} (\hat{p}^* \cdot \hat{n}_1) (\hat{p}^* \cdot \vec{\sigma}) + (|S|^2 - |P|^2) p_{n0} \hat{n}_1 \cdot \vec{\sigma}}{|S|^2 + |P|^2 + 2 p_{n0} \Re_e(S P^*) (\hat{p}^* \cdot \hat{n}_1)} \right]$$

D'après les définitions (51) et la forme de P_f :

$$P_f = \frac{I}{2} (1 + \vec{P}_f \cdot \vec{\sigma})$$

il vient :

$$(56) \quad \vec{P}_f = \frac{(-\alpha + p_{n0} \cos \theta)}{1 - \alpha p_{n0} \cos \theta} \hat{p}^* + \frac{\beta p_{n0} \sin \theta}{1 - \alpha p_{n0} \cos \theta} \frac{\hat{n}_1 \times \hat{p}^*}{\sin \theta} + \frac{\gamma p_{n0} \sin \theta}{1 - \alpha p_{n0} \cos \theta} \frac{\hat{p}^* \times (\hat{n}_1 \times \hat{p}^*)}{\sin \theta}$$

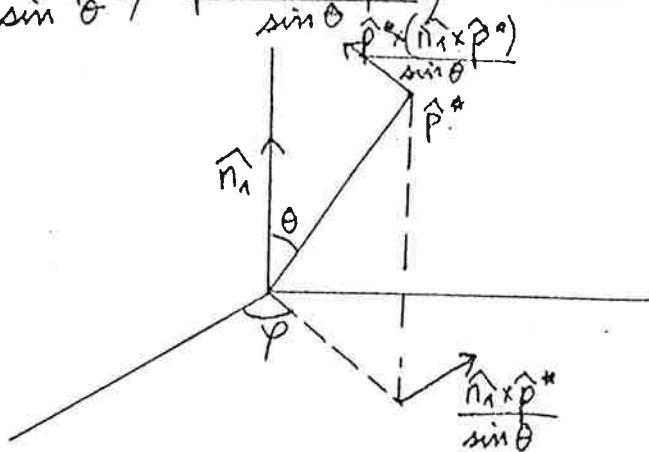
$$\cos \theta = \hat{n}_1 \cdot \hat{p}^*$$

et

$$I_f = I [|S|^2 + |P|^2] (1 - \alpha p_{n0} \cos \theta)$$

(57)

$(\hat{p}^*, \frac{\hat{n}_1 \times \hat{p}^*}{\sin \theta}, \frac{\hat{p}^* \times (\hat{n}_1 \times \hat{p}^*)}{\sin \theta})$ forment une base orthonormée



On a aussi d'après (51) :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{4 \Re_e^2(S^* P) + 4 \Im^2(S^* P) + (|S|^2 - |P|^2)^2}{(|S|^2 + |P|^2)^2} = 1$$

d'où :

$$P_f^e = \frac{1}{(1 - d p_n \cos \theta)^2} \left[(-d + p_n \cos \theta)^2 + \beta^e p_n^e \sin^2 \theta + \delta^e p_n^e \sin^2 \theta \right]$$

$$P_f^z = \frac{1}{(1 - d p_n \cos \theta)^2} \left[1 + d^2 p_n^2 \cos^2 \theta - 2 d p_n \cos \theta - (1 - d^e)(1 - p_n^2) \right]$$

donc :

$$P_f = \sqrt{1 - \frac{(1 - d^e)(1 - p_n^2)}{(1 - d p_n \cos \theta)^2}} \quad (58)$$

Les expressions (56) et (58) représentent la polarisation générale du proton de désintégration du Λ^0 en fonction de l'angle θ , de la polarisation initiale p_n^0 et des amplitudes des ondes S et P.

Les calculs ont été faits dans le centre de masse du système c'est à dire dans le repère du Λ^0 .

b) Diffusion proton-proton :

La polarisation du proton précède dans le champ magnétique, et la matrice densité du proton au moment de la diffusion est alors :

$$\rho_B' = \frac{1}{2} I_B (1 + \vec{P}_B' \cdot \vec{\sigma})$$

la matrice de la diffusion est :

$$S = g + h \hat{N} \cdot \vec{\sigma}$$

La cible n'étant pas polarisée (proton), le vecteur $h \hat{N}$ ne peut dépendre que des impulsions initiale et finale. Ce vecteur étant axial, doit être parallèle à $\frac{\vec{p}_i \times \vec{p}_f}{|\vec{p}_i \times \vec{p}_f|}$, c'est à dire perpendiculaire au plan de diffusion II.

g et h sont des fonctions de l'angle de diffusion et de l'énergie du système.

De la même manière que précédemment, on obtient alors :

$$\rho_F = S \rho_{F'} S^+ = \frac{1}{2} I_F (1 + \vec{P}_F \cdot \vec{\sigma})$$

avec :

$$(58) \quad \vec{P}_F = \frac{-\alpha_d + \rho_{F'} \cos \theta_d}{1 - \alpha_d \rho_{F'} \cos \theta_d} \cdot \hat{N} + \frac{\beta_d \cdot \rho_{F'} \sin \theta_d}{1 - \alpha_d \rho_{F'} \cos \theta_d} \cdot \frac{\hat{n}_{F'} \times \hat{N}}{\sin \theta_d} + \frac{\gamma_d \rho_{F'} \sin \theta_d}{1 - \alpha_d \rho_{F'} \cos \theta_d} \cdot \frac{\hat{N} \times (\hat{n}_{F'} \times \hat{N})}{\sin \theta_d}$$

$$\text{où : } \alpha_d = \frac{-2 \operatorname{Re}(g^* \cdot h)}{|g|^2 + |h|^2} = -S(\theta, E) \quad \beta_d = \frac{2 \operatorname{Im}(g^* \cdot h)}{|g|^2 + |h|^2} \quad \gamma_d = \frac{|g|^2 - |h|^2}{|g|^2 + |h|^2}$$

($S(\theta, E)$ est la polarisation qu'a un faisceau incident non polarisé à la sortie de la diffusion).

$$\begin{aligned} I_F &= I_{F'} [|g|^2 + |h|^2] (1 - \alpha_d \rho_{F'} \cos \theta_d) \\ P_F &= \sqrt{1 - \frac{(1 - \alpha_d^2)(1 - \rho_{F'}^2)}{(1 - \alpha_d \rho_{F'} \cos \theta_d)^2}} \end{aligned} \quad (59)$$

Les calculs sont faits dans le repère de la cible c'est à dire dans le repère du laboratoire. ($\cos \theta_d = \hat{N} \cdot \hat{n}_{F'}$; $\vec{P}_{F'} = \rho_{F'} \hat{n}_{F'}$).

Si on prend des Λ^0 non polarisés $P_{\Lambda^0} = 0$ et d'après (56)

$$\vec{P}_F = -\alpha_{\Lambda^0} \hat{P}^{\Lambda^0} \quad (60)$$

Pour des Λ^0 non polarisés qui se désintègrent en vol, la polarisation du proton émis est donc longitudinale dans le système du Λ^0 . Elle admet une composante transversale dans le repère du laboratoire.

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \quad f \\ \text{Trans} \end{array} = -\alpha_{\Lambda^0} \sin \phi \hat{n}$$

La relation (59) montre que la distribution angulaire de la diffusion $p - p$ est proportionnelle à $1 - \alpha_{\Lambda^0} p_f' \cos \theta$

L'étude de cette distribution permettra donc de connaître $-\alpha_{\Lambda^0} p_f' \cos \theta$. $\alpha_{\Lambda^0} \hat{n}$ est connu d'après les études faites sur la diffusion p -proton. On arrivera ainsi à évaluer le module et le signe de p_f' .

C'est la composante transversale de la polarisation qui est utile pour déterminer une asymétrie dans la diffusion $p-p$ car la composante longitudinale elle, compte-tenu de la symétrie du système et de la conservation de la parité dans l'interaction forte $p - p$, ne peut pas faire apparaître une telle dissymétrie.

Le spin du proton de désintégration ^{tournant} dans le champ magnétique ; pour remonter de $p \quad f'$ à α_{Λ} il nous faudra calculer l'angle dont α à tourner le spin par rapport à la vitesse. C'est ce que nous allons déterminer à l'aide de l'équation T.B.M.T.

Auparavant, signalons les résultats obtenus :

$$|\alpha_{\Lambda}| > 0,45 \pm 0,17 \quad \text{d'après CRAWFORD [14]}$$

Cela conduit à :

$$\langle \cos \theta \rangle > 0,25 \pm 0,05$$

Si on suppose $J = 3/2$, la formule (50) donne :

$$\langle \cos \theta \rangle \leq 0,11$$

pour $J = 5/2$

$$\langle \cos \theta \rangle \leq 0,07$$

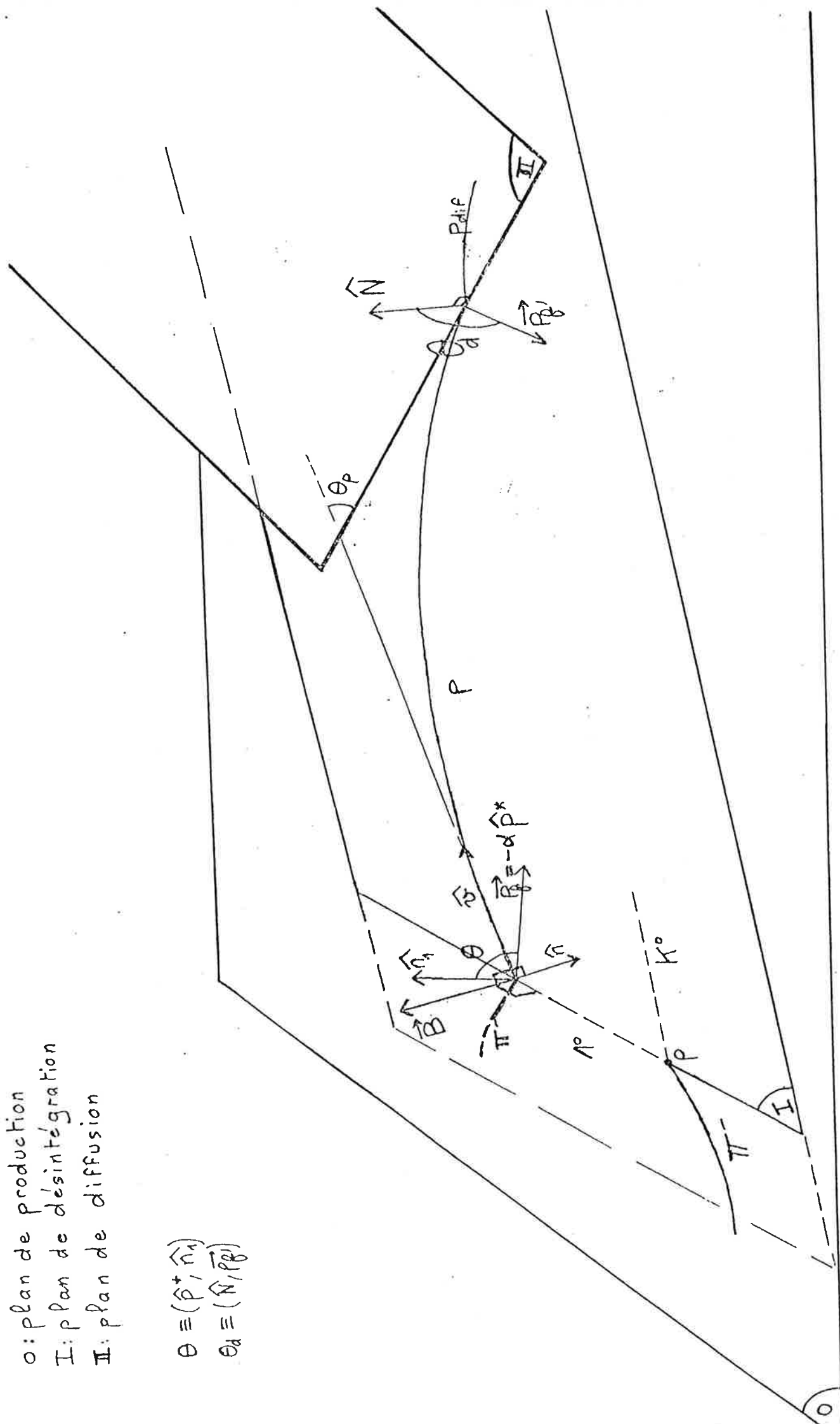
La valeur du paramètre d'asymétrie α_{Λ} déduit des données expérimentales, exclut donc les possibilités $3/2$, $5/2$ etc. pour le spin du Λ^0 . Cela conduit donc à prendre :

$$S_{\Lambda^0} = 1/2$$

0: plan de production
 I: plan de désintégration
 II: plan de diffusion

$$\theta \equiv (\hat{p}^*, \hat{n}_1)$$

$$\theta_d \equiv (\hat{n}, \hat{p}_d)$$



c) Utilisation de l'équation T.B.M.T. pour calculer la précession du spin du proton de désintégration du Λ^0 :

A partir de (4), nous allons établir quatre relations qui nous permettront de déterminer le mouvement du proton et de sa polarisation.

$$\frac{ds}{d\tau} = -\mu_0 [g \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} + (g-2)(\mathbf{s} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}] \quad (4)$$

$$\mathbf{s} = (s^0, \vec{s}) \quad \mathbf{F} = (\vec{E}, \vec{B}) \quad \mathbf{u} = (\gamma, \vec{\eta}) \text{ avec } \vec{\eta} = \gamma \vec{v}$$

B5 donne alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} &= (-\vec{E} \cdot \vec{s}, -\vec{s} \times \vec{B} - s^0 \vec{E}) \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} &= (-\vec{E} \cdot \vec{\eta}, -\vec{\eta} \times \vec{B} - \gamma \vec{E}) \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} &= (-s^0 \vec{E} \cdot \vec{\eta} + (\vec{s}, \vec{\eta}, \vec{B}) + \gamma (\vec{s} \cdot \vec{E})) \end{aligned}$$

d'où :

$$\text{B.M.T. (61)} \quad \frac{ds}{d\tau} = \mu_0 \left\{ g(\vec{E} \cdot \vec{s}, \vec{s} \times \vec{B} + s^0 \vec{E}) + (g-2) [s^0(\vec{E} \cdot \vec{v}) - (\vec{s}, \vec{v}, \vec{B}) - (\vec{s} \cdot \vec{E})] \gamma (1, \vec{v}) \right\}$$

La force de LORENTZ $\dot{\mathbf{u}} = -\frac{q}{m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$ s'écrit aussi :

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{e}{m} \gamma (\vec{E} \cdot \vec{v}, \vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}) \quad (62)$$

Dans le système du laboratoire, le temps t est défini par $dt = \gamma d\tau$, de plus, il n'y a pas de champ électrique appliqué. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{\mu_0}{\gamma} \left\{ g \vec{s} \times \vec{B} - (g-2) \gamma^2 (\vec{s}, \vec{v}, \vec{B}) (1, \vec{v}) \right\} \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \frac{e}{m} \vec{v} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (63)$$

La polarisation est représentée par le quadrivecteur :

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = e_\parallel \cos \phi + e_\perp \sin \phi$$

où $e_e, e_r, \phi, |s|$ sont définis page 10. On en déduit $p^2 = -1$

$$P = (\gamma v \cos \phi, \gamma \hat{v} \cos \phi + \hat{n} \sin \phi)_L \quad I$$

Dans un repère quelconque, on pose :

$$P = (p^0, \vec{p}) \quad \text{donc} \quad \vec{p} = \gamma \hat{v} \cos \phi + \hat{n} \sin \phi = \hat{v} \cos \phi' + \hat{n} \sin \phi'$$

et on a $p^2 = p^{0^2} - \vec{p}^2$

soit $\vec{p}^2 = 1 + \gamma^2 v^2 \cos^2 \phi$

Dans le repère propre, $P = (0, \hat{v} \cos \phi + \hat{n} \sin \phi)$

Ceci est représenté par le schéma de la page 70.

La définition de P donne :

$$\frac{dP}{dt} = \left(-\gamma v \sin \phi \frac{d\phi}{dt}, -\gamma \hat{v} \sin \phi \frac{d\phi}{dt} + \gamma \cos \phi \frac{d\hat{v}}{dt} + \hat{n} \cos \phi \frac{d\phi}{dt} + \sin \phi \frac{d\hat{n}}{dt} \right)$$

La relation (63) devient :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\mu_0}{\gamma} \left\{ g(\gamma \hat{v} \cos \phi + \hat{n} \sin \phi) \times \vec{B} - (g-2)\gamma^2 [(\gamma \hat{v} \cos \phi + \hat{n} \sin \phi), \vec{v}, \vec{B}] (1, \vec{v}) \right\}$$

De ces deux expressions, on déduit :

$$\frac{d\phi}{dt} = \mu_0 (g-2) (\hat{n}, \hat{v}, \vec{B}) \quad (64) \quad II$$

Cette équation est, en fait, un cas particulier de la relation générale (9) ($\vec{E} = 0$)

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{devient aussi :}$$

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{e}{m\gamma} \hat{v} \times \vec{B} \quad (65) \quad III$$

A partir de (64) et (65) et des deux expressions donnant $\frac{dP}{dt}$ il vient :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{e}{m} \hat{v} \times \vec{B} + \hat{n} \mu_0 (g-2) (\hat{n}, \hat{v}, \vec{B}) - \mu_0 g (\hat{v} \times \vec{B}) \right] \cos \phi \\ & + \left[\frac{d\hat{n}}{dt} - \gamma \hat{v} \mu_0 (g-2) (\hat{n}, \hat{v}, \vec{B}) - \frac{\mu_0}{\gamma} g \hat{n} \times \vec{B} + (g-2) \mu_0 \gamma v^2 (\hat{n}, \hat{v}, \vec{B}) \right] \sin \phi = 0 \end{aligned}$$

Posons $\vec{B} = \hat{v} B_v + \hat{n} B_n + (\hat{v} \times \hat{n}) B_\perp$

$(\hat{v}, \hat{n}, \hat{v} \times \hat{n})$ forment une base orthonormée)

La relation précédente s'écrit alors $(\gamma^2(1-v^2) = 1)$:

$$- \mu_0 (g-2) B_n (\hat{v} \times \hat{n}) \cos \phi + \left[\frac{d\hat{n}}{dt} - \frac{e}{m\gamma} (\hat{n} \times \vec{B}) + \frac{\mu_0}{\gamma} (g-2) B_v (\hat{v} \times \hat{n}) \right] \sin \phi = 0$$

d'où finalement :

$$\frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{e}{m\gamma} (\hat{n} \times \vec{B}) + \frac{\mu_0}{\gamma} (g-2) [-\vec{B} \cdot \hat{v} + \gamma \vec{B} \cdot \hat{n} \cot \phi] \hat{v} \times \hat{n}$$

IV (66)

La première montre que le proton restera dans le plan de désintégration et sera animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire $\omega_L = \frac{eB}{m\gamma}$ (Précession de LARMOR). La deuxième indique que la polarisation, initialement dans I, y demeurera. La précession du spin par rapport à la vitesse est donnée par la dernière relation. Soit θ_p l'angle de précession de l'impulsion du proton autour de \vec{B} ; on a alors :

$$\boxed{\frac{d\theta_p}{dt} = \omega_L = \frac{eB}{m\gamma}} \quad (70) \quad \text{IV}$$

d'où :

$$\boxed{\frac{d\phi}{d\theta_p} = \frac{\gamma}{2} (g-2) (\vec{v}, \hat{B}, \hat{n}) = \frac{\gamma}{2} (g-2)}$$

Si θ_p est l'angle fini dont a dévié le proton, la précession du spin est donnée par :

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{\gamma}{2} (g-2) \theta_p} \quad (71)$$

Les photos obtenues dans la chambre à bulles permettent, par stéréographie, de déterminer θ_p et le rayon de courbure ρ de la trajectoire du proton émis. On a :

$$\omega = \frac{eB}{m\gamma} = \frac{v}{\rho}$$

d'où l'impulsion du proton :

$$\boxed{p = \rho \cdot e \cdot B} \quad (72)$$

Ceci permet, par coïncidence, d'identifier les phénomènes observés et de faire des bilans énergétiques.

$$v = \frac{e \cdot B \cdot \rho}{m\gamma} \Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + \frac{e^2 B^2 \rho^2}{m^2 c^2}}$$

D'après (71) :

$$\boxed{\Delta\phi = \sqrt{1 + \frac{e^2 B^2 \rho^2}{m^2 c^2}} \frac{(g-2)}{2} \theta_p} \quad (73)$$

Le tableau de la page 74 donne, à partir de l'expression (72), l'impulsion d'un proton placé dans un champ magnétique compris entre 1 et 8 Teslas, le rayon de courbure observé allant de 0,5 à 6 m.

A partir de (73), nous donnons la précession du spin par rapport à la vitesse pour un angle de déviation variant de 2 ° à 60° et le rayon de courbure de 0,5 à 7 m (tableaux pages 75 et 76).

Deux valeurs du champ magnétique sont considérées : 10 000 et 13 000 Gauss.

$$\frac{\Delta(\Delta\phi)}{\Delta\phi} = \frac{e^2 B_p^2 dp}{m^2 c^2 \left(1 + \frac{e^2 B_p^2 p^2}{m^2 c^2}\right)} + \frac{\Delta\theta_p}{\theta_p} \sim \frac{\Delta\theta_p}{\theta_p}$$

L'erreur sur θ_p est au mieux 1/100 est évidemment une fonction de θ_p .

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta B}{B}$$

Les deux incertitudes sont très dépendantes des conditions expérimentales. (Par exemple, la connaissance du champ magnétique appliqué varie beaucoup d'une expérience à l'autre)

Les constantes sont données par :

$$g = 5,58555 \text{ (en magnéton nucléaire)}$$

$$e = 1,60207 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$c = 2,997929 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$m = 1,67243 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

44

IMPULSION DU PROTON EN FONCTION DU RAYON DE COURBURE
ET DU CHAMP MAGNETIQUE

$\frac{B}{p}$	1	1, 2	1, 4	1, 7	2	5	8
0, 5	150	180	210	255	300	750	1.200
1	300	360	420	510	600	1.500	2.400
1, 5	450	540	630	765	900	2.250	3.600
2	600	720	840	1.020	1.200	3.000	4.800
2, 5	750	900	1.050	1.275	1.500	3.750	6.000
3	900	1.080	1.260	1.530	1.800	4.500	7.200
3, 5	1.050	1.260	1.470	1.785	2.100	5.250	8.400
4	1.200	1.440	1.680	2.040	2.400	6.000	9.600
4, 5	1.350	1.620	1.890	2.295	2.700	6.750	10.800
5	1.500	1.800	2.100	2.550	3.000	7.500	12.000
5, 5	1.650	1.980	2.310	2.805	3.300	8.250	13.200
6	1.800	2.160	2.520	3.060	3.600	9.000	14.400

p est donné en MeV/c , r en mètres, B en Tesla (10.000 Gauss)

$$\Delta\phi(\theta_p, \rho)$$

$\Delta\phi, \theta_p$ sont exprimés en degrés, ρ en metres.

Les calculs sont faits pour $B = 10.000$ Gauss.

$$\frac{e^2 B^2}{m^2 c^2} = 0,1021$$

$\theta_p \backslash \rho$	2	4	6	8	10	15	20	25	30	35	40	50	60
0,5	3,63	7,26	10,9	14,5	18,2	27,2	36,3	45,4	54,5	63,5	72,6	90,8	109
1	3,76	7,52	11,3	15,1	18,8	28,2	37,6	47,0	56,5	65,9	75,3	94,1	113
1,5	3,98	7,95	12,0	15,9	19,9	29,8	39,8	49,7	59,6	69,6	79,5	99,4	119
2	4,26	8,51	12,8	17,0	21,3	31,9	42,6	53,2	63,8	74,5	85,1	106	128
2,5	4,59	9,18	13,8	18,4	22,9	34,4	45,9	57,4	68,8	80,3	91,8	115	138
3	4,97	9,93	14,9	19,9	24,8	37,2	49,7	62,1	74,5	86,9	99,3	124	149
3,5	5,38	10,8	16,1	21,5	26,9	40,3	53,8	67,2	80,7	94,1	108	134	161
4	5,82	11,6	17,5	23,3	29,1	43,6	58,2	72,7	87,3	102	116	145	175
4,5	6,28	12,6	18,8	25,1	31,4	47,1	62,8	78,5	94,2	110	126	157	188
5	6,76	13,6	20,3	27,0	33,8	50,7	67,6	84,5	101	118	135	169	203
5,5	7,25	14,5	21,7	29,0	36,2	54,4	72,5	90,6	109	127	145	181	218
6	7,75	15,5	23,3	31,0	38,8	58,1	77,5	96,9	116	136	155	194	233
6,5	8,27	16,5	24,8	33,1	41,3	62,0	82,6	103	124	145	165	207	248
7	8,78	17,6	26,3	35,1	43,9	65,9	87,8	110	132	154	176	220	264

$$\Delta\phi(\theta_p, \rho)$$

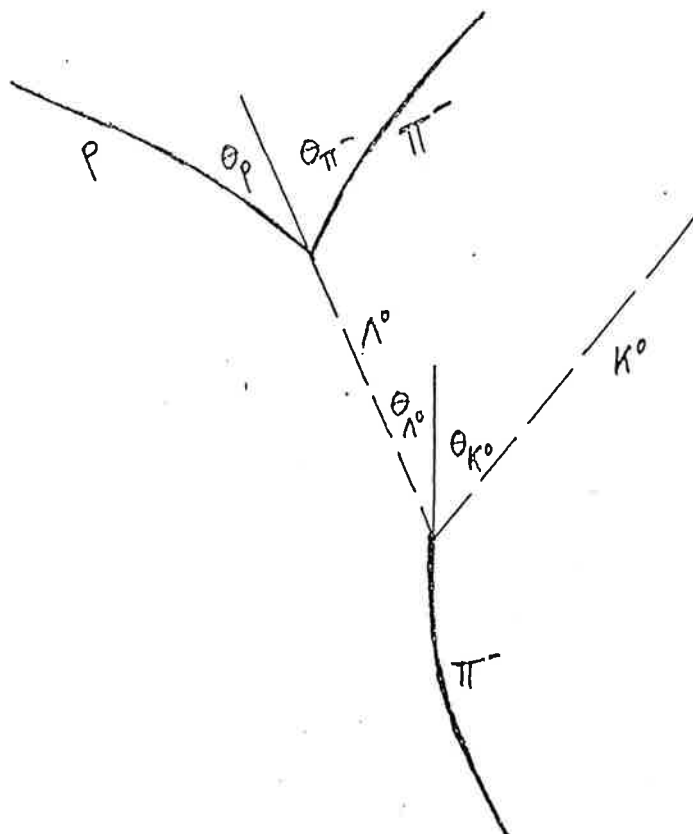
$\Delta\phi, \theta_p$ sont exprimés en degrés, ρ en metres.

Les calculs sont faits pour $B = 13.000$ Gauss.

$$\frac{e^2 B^2}{m^2 c^2} = 0,17255$$

$\rho \backslash \theta_p$	2	4	6	8	10	15	20	25	30	35	40	50	60
0,5	3,66	7,32	11,0	14,6	18,3	27,5	36,6	45,8	54,9	64,1	73,2	91,6	110
1	3,88	7,77	11,6	15,5	19,4	29,1	38,8	48,5	58,2	67,9	77,6	97,1	116
1,5	4,22	8,45	12,7	16,9	21,1	31,7	42,2	52,8	63,4	73,9	84,5	106	127
2	4,66	9,32	14,0	18,6	23,3	35,0	46,6	58,3	69,9	81,6	93,2	116	140
2,5	4,98	9,96	14,9	19,9	24,9	37,4	49,8	62,3	74,7	87,2	99,6	125	149
3	5,73	11,5	17,2	22,9	28,6	43,0	57,3	71,6	85,9	100	115	143	172
3,5	6,33	12,7	19,0	25,3	31,6	47,4	63,3	79,1	94,9	111	127	158	190
4	6,95	13,9	20,9	27,8	34,8	52,1	69,5	86,9	104	122	139	174	209
4,5	7,60	15,2	22,8	30,4	38,0	57,0	76,0	95,0	114	133	152	190	228
5	8,27	16,5	24,3	33,1	41,3	62,0	82,6	103	124	145	165	207	248
5,5	8,94	17,9	26,8	35,8	44,7	67,1	89,4	112	134	156	179	224	268
6	9,63	19,2	28,9	38,5	48,1	72,2	96,3	120	144	168	193	241	289
6,5	10,3	20,6	31,0	41,3	51,6	77,4	103	129	155	181	206	258	310
7	11,0	22,0	33,1	44,1	55,1	82,7	110	138	165	193	220	276	331

On peut, enfin, déterminer l'impulsion du proton de désintégration en fonction de l'énergie du π^- incident et des angles d'émission θ_{Λ^0} , θ_{K^0} , θ_{π^-} , θ_p .



Pour cela, on suppose la conservation de la quantité de mouvement, c'est à dire pas de perte d'énergie ; en fait, une partie de celle-ci est absorbée dans l'ionisation de la chambre à bulles.

Le proton de la chambre étant initialement au repos :

$$\vec{p}_{\pi^-} = \vec{p}_{K^0} + \vec{p}_{\Lambda^0}$$

on en déduit :

$$p_{\pi^-} = p_{K^0} \cos \theta_{K^0} + p_{\Lambda^0} \cos \theta_{\Lambda^0}$$

$$p_{K^0} \sin \theta_{K^0} = p_{\Lambda^0} \sin \theta_{\Lambda^0}$$

d'où

$$p_{\pi^-} = p_{n^0} \sin \theta_{n^0} \cot \theta_{K^0} + p_{n^0} \cos \theta_{n^0}$$

soit

$$p_{n^0} = \frac{p_{\pi^-}}{\cos \theta_{n^0} (1 + \tan \theta_{n^0} \cot \theta_{K^0})}$$

de même :

$$p_p = \frac{p_{n^0}}{\cos \theta_p (1 + \tan \theta_p \cot \theta_{\pi^-})}$$

soit finalement :

$$p_p = \frac{p_{\pi^-}}{\cos \theta_{n^0} \cos \theta_p (1 + \tan \theta_{n^0} \cot \theta_{K^0}) (1 + \tan \theta_p \cot \theta_{\pi^-})}$$

De la norme du quadrivecteur énergie impulsion, on tire :

$$m_{\pi}^2 c^4 = (E_{cin} + E_{rep})^2 - \vec{p}^2 c^2$$

$$\vec{p}^2 c^2 = E_{cin}^2 + 2 E_{cin} E_{rep}$$

d'où :

$$p_p = \frac{\sqrt{\frac{E_{cin\pi^-}^2}{c^2} + 2 E_{cin\pi^-} E_{rep\pi^-}}}{(\cos \theta_{n^0} \cos \theta_p) (1 + \tan \theta_{n^0} \cot \theta_{K^0}) (1 + \tan \theta_p \cot \theta_{\pi^-})}$$

Le tableau de la page (79) est calculé à partir de cette formule pour une énergie incidente du π^- de 3 Be V.

IMPULSION DU PROTON EN FONCTION DE $\theta_{\Lambda^0}, \theta_{K^0}, \theta_{\pi^-}, \theta_p$

Energie incidente du π^- : 3 BeV

Energie au repos : 139,59 MeV

Impulsion du π^- : 3136,5 MeV/c

θ_{Λ^0}	θ_{K^0}	θ_{π^-}	θ_p	Impulsion du proton	θ_{Λ^0}	θ_{K^0}	θ_{π^-}	θ_p	Impulsion du proton
5	15	10	5	1,592	20	30	10	5	1,373
5	15	15	5	1,796	20	30	15	5	1,549
5	15	20	10	1,624	20	30	20	10	1,400
5	15	30	10	1,846	20	30	30	10	1,592
5	30	30	20	1,785	20	50	30	20	1,776
5	30	40	20	2,029	20	50	50	20	2,084
5	30	50	30	2,127	20	50	50	30	1,989
5	30	60	30	2,368	20	50	60	30	2,214

Les angles sont donnés en degrés, l'impulsion est exprimée en BeV/c

IIIB : DISTRIBUTION ANGULAIRE SI $S_{\Lambda^0} = 3/2, 5/2, \dots$

Si on suppose $S_{\Lambda^0} = 3/2$, le système $(\pi^- + p)$ a un moment cinétique total $J = 3/2$. Les états possibles sont donc $P, 3/2, D, 3/2$. Dans le repère du Λ^0 , la distribution angulaire est alors :

$$I(\cos \theta) = \sum_{m=-3/2}^{m=+3/2} \frac{1}{4} p_{mm} (a^* \langle P, m | + b^* \langle D, m |) (a | P, m \rangle + b | D, m \rangle)$$

où p_{mm} est la probabilité de trouver le Λ^0 avec $M = m$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

La formule de LEE et YANG impose :

$$|\langle \cos \theta \rangle| \leq \frac{1}{2S_{\Lambda^0} + 2}$$

ici

$$|\langle \cos \theta \rangle| \leq \frac{1}{5} \quad \left(\langle \cos \theta \rangle = \int_{-1}^{+1} I(\cos \theta) \cos \theta d(\cos \theta) \right)$$

ceci quels que soient les coefficients a et b et les valeurs de p_{mm} .

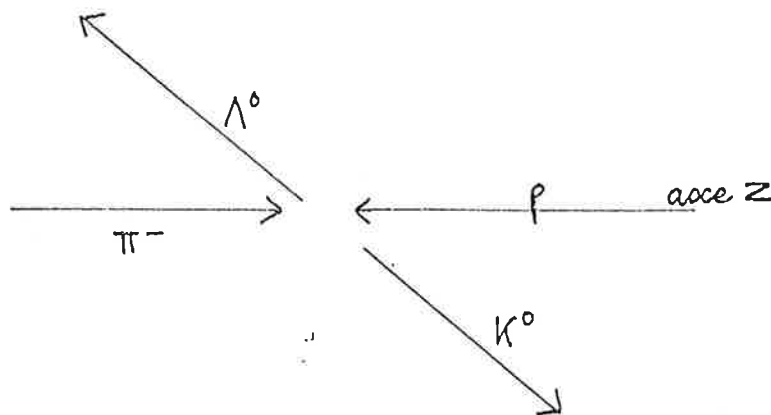
Les résultats expérimentaux sont en contradiction avec cette expression dans un rapport d'à peu près trois. Si on prenait l'hypothèse $S_{\Lambda^0} = 5/2$, on aurait : $(D_{5/2}, F_{5/2})$.

$$|\langle \cos \theta \rangle| \leq \frac{1}{7}$$

Les mesures montrent que cette formule n'est pas vérifiée dans un rapport de 5.

La comparaison des formules de LEE et YANG avec les données expérimentales a donc permis de montrer que la seule valeur acceptable pour le spin du Λ^0 était $1/2$.

Signalons, enfin, qu'ADAIR [15] a donné un autre argument en faveur du spin $1/2$ pour le Λ^0 . Soit la réaction de production dans le centre de masse :



La composante J_z du système $\pi^- + p$ est égale à $\pm 1/2$ puisque $L_z = 0$.

Considérons des Λ^0 émis dans la direction d'incidence z des π^- ; alors, en supposant $S_{K^0} = 0$ (ce qui était connu) et que les protons cibles ne soient pas polarisés, la composante du spin du Λ^0 sur l'axe z ne peut prendre que les valeurs $\pm 1/2$ avec égale probabilité pour les deux.

Si l'on suppose $S_{\Lambda^0} = 1/2$, on peut alors appliquer les formules (52); mais d'après ce qu'on vient de voir, P_{Λ^0} est nul et la distribution angulaire de l'émission du proton est :

$$|\psi|^2 = |S|^2 + |P|^2$$

c'est à dire isotropique.

ADAIR donne le tableau suivant :

spin du Λ^0 :	distribution angulaire
$1/2$	1
$3/2$	$1/2 + 3/2 \cos^2 \theta$
$5/2$	$3/4 - 3/2 \cos^2 \theta + (15/4) \cos^4 \theta$
$7/2$	$9/16 + (45/16) \cos^2 \theta - (165/16) \cos^4 \theta + (175/16) \cos^6 \theta$

L'expérience montre que la distribution angulaire du proton de la désintégration d'un Λ^0 émis dans la direction du faisceau incident est isotropique. L'expérience tranche donc en faveur d'un spin $1/2$ pour le Λ^0 .

CONCLUSION

La théorie relativiste des moments multipôlaire montre que THOMAS, BARGMANN, MICHEL et TELEGDI considèrent une particule comme une masse classique essentiellement ponctuelle. Ceci revient à négliger la bilocalité ; notion qui s'introduit en considérant une particule comme une molécule ou comme une masse tournante relativiste. L'équation de T.B.M.T. n'est donc pas intéressante pour étudier la structure interne des corpuscules, par contre, elle est très utile dans les expériences de collisions ou de désintégrations de particules quand les spins de celles-ci sont soumis à un champ magnétique uniforme et constant (comme, par exemple, dans la désintégration $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$).

APPENDICE A

PRODUIT CONTRACTÉ ANTISYMETRISE DE DEUX TENSEURS DE MEME RANG

Soient A et B deux tenseurs de l'espace de MINKOWSKI de même rang :

$$(A \wedge B)_{\mu\nu} = A_{\mu}^{d_1 d_2 \dots d_k} B_{d_1 d_2 \dots d_k \nu} - A_{\nu}^{d_1 d_2 \dots d_k} B_{d_1 d_2 \dots d_k \mu}$$

Si A et B sont des tenseurs antisymétriques de rang deux, et a, b, et c des vecteurs :

$$(A \wedge B)^+ = (\text{Tr } A) B^+ + A \wedge B^+ \quad \text{A 1}$$

$$[(A \otimes a) \wedge (\nabla \otimes B)]^+ = (a \cdot A) \cdot (\nabla \otimes B^+) + a \wedge [A \cdot (\nabla \otimes B^+)] \quad \text{A 2}$$

$$(A \wedge B)^+ = A \wedge B^+ = A^+ \wedge B \quad \text{A 3}$$

$$[(a \wedge b) \wedge A] \cdot c = a (b \cdot A \cdot c) - b (a \cdot A \cdot c) - (a \cdot c) b \cdot A - (b \cdot c) a \cdot A \quad \text{A 4}$$

$$(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = (b \cdot c) (a \wedge d) - (b \cdot d) (a \wedge c) - (a \cdot c) (b \wedge d) + (a \cdot d) (b \wedge c) \quad \text{A 5}$$

$$(a \wedge b) \wedge (c \wedge d)^+ = (b \cdot c) (a \wedge d)^+ - (b \cdot d) (a \wedge c)^+ - (a \cdot c) (b \wedge d)^+ + (a \cdot d) (b \wedge c)^+ \quad \text{A 6}$$

APPENDICE B

DECOMPOSITION DES TENSEURS a , A EN PARTIES SPATIALE ET TEMPORELLE

Pour un repère de vitesse unitaire n , les observations du vecteur a et du tenseur A (antisymétrique de rang deux) sont données par :

$$a = (a^0, \vec{a}) \quad \text{où } a^0 = a \cdot n \quad \text{et } \vec{a} = a - (a \cdot n) n \quad \text{B I}$$

$$A = (\vec{t}, \vec{s}) \quad \text{avec } t = n \cdot A \quad \text{et } s = A^+ \cdot n \quad \text{B 2}$$

soit

$$A = n \wedge t + (n \wedge s)^+ \quad \text{B 3}$$

On a alors :

$$A^+ = (-\vec{s}, \vec{t}) \quad \text{B 4}$$

$$a \cdot A = (\vec{a} \cdot \vec{t}, a^0 \vec{t} + \vec{a} \times \vec{s}) \quad \text{B 5}$$

$$a \wedge b = (a^0 \vec{b} - b^0 \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}) \quad \text{B 6}$$

$$1/2 A \cdot A = \vec{s}^2 - \vec{t}^2 \quad \text{B 7}$$

$$1/2 A \cdot A^+ = 2 \vec{s} \cdot \vec{t} \quad \text{B 8}$$

$$(a \wedge b)^+ \cdot c = ((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), a^0 \vec{b} \times \vec{c} + b^0 \vec{c} \times \vec{a} + c^0 \vec{a} \times \vec{b}) \quad \text{B 9}$$

$$a \wedge A = (\vec{a} \cdot \vec{s}, a^0 \vec{s} - \vec{a} \times \vec{t}) \quad \text{B 10}$$

$$(a \wedge b) \cdot c = (\vec{c} (b^0 \vec{a} - a^0 \vec{b}), c^0 (b^0 \vec{a} - a^0 \vec{b}) + ((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c})) \quad \text{B 11}$$

Signalons enfin 3 formules importantes :

$$a \cdot (b \wedge c) = (a \cdot b) c - b (a \cdot c) \\ A = \frac{-b \wedge (A \cdot a) + [a \wedge (A^+ \cdot b)]}{a \cdot b}$$

$$A^+_{\alpha\beta} B^{+\beta}_{\lambda} = B_{\alpha\beta} A^{\beta}_{\lambda} + 1/2 [A \cdot B] g_{\alpha\lambda}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARGMANN - MICHEL - TELEGDI :
Physical Review Letters - 1959 - Vol 2 - N 10 - P. 435-436.
- [2] H. BACRY :
Thèse d'Etat - Annales de Physique - 1963 - Tome 8 P. 197 à 237.
- [3] GELL-MANN, GOLDBERGER :
Physical Review - 1954 - Vol 96 - N 5 - P. 1433 à 1438.
- [4] HALBWACHS :
Théorie relativiste des fluides à spin. (GAUTHIER-VILLARS 1959)
- [5] D.E.A. - ROYER : NANTES 1973.
- [6] LANDAU et LIFSCHITZ :
Mécanique quantique relativiste P. 125 à 129. (PERGAMON PRESS 1971)
- [7] HAGEDORN :
Lectures C.E.R.N. (Mai 1962).
- [8] H. BACRY :
C.R. Acad. Sciences , 1961, 253, 389.
- [9] H. BACRY :
Leçons sur la théorie des groupes et les symétries des particules élémentaires. (GORDON AND BREACH 1964)
- [10] HALBWACHS, VIGIER, SOURIAU :
Journal de Physique. p 394 ; 22. 1961
- [11] SEBILLE : Thèse 3ème Cycle NANTES 1975

- [12] T.D. LEE et C.N. YANG :
Physical Review - 1958 - VOL 109 N 5 P. 1755.
- [13] CRAWFORD, CRESTI, GOOD etc...
Physical Review - 1957 - VOL 108 N 4 P. 1102
- [14] CRAWFORD, CRESTI, GOOD etc...
Physical Review Letters 2, 174 (1959).
- [15] ADAIR :
Physical Review - 1955 - VOL 100 N 5 P. 1540

B.U.
NANTES
Sect.
Science